Toisen, kolmannen ja neljännen asteen polynomiyhtälöiden ratkaisukaavat

Pro Gradu -tutkielma

Riikka Luikku
2382124
Matematiikan tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto

Syksy 2020

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan toisen, kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden yleisiin ratkaisuihin sekä algebran peruslauseeseen. Lisäksi tutustutaan joihinkin kompleksilukujen laskutoimituksiin liittyviin tuloksiin, joita tarvitaan erityisesti kolmannen asteen yhtälöiden yleisen ratkaisukaavan sekä algebran peruslauseen yhteydessä. Tarkoituksena on myös esittää esimerkkejä toisen, kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisemisesta tutkielmassa esitettyjä ratkaisukaavoja käyttäen.

Luvussa 2 käsitellään lukiosta tuttuja toisen asteen polynomifunktioihin liittyviä tuloksia, erityisesti toisen asteen polynomifunktion nollakohtien määrittämistä ja näin ollen toisen asteen polynomiyhtälöiden ratkaisemista. Samalla tarkastellaan toisen asteen polynomien juurten lukumäärää ja tekijöihinjakoa. Kuten edellä mainittiin, näitä asioita käsitellään jo lukiossa ja lähteenä tässä luvussa onkin käytetty Lukion Calculus 1: MAA1 Funktiot ja yhtälöt & MAA2 Polynomifunktiot –kirjaa.

Kolmannessa luvussa perehdytään kompleksilukuihin ja niillä laskemiseen. Luvussa keskitytään erityisesti napakoordinaattimuotoisilla kompleksiluvuilla laskemiseen, kompleksilukujen moduleihin, kolmioepäyhtälöihin sekä kompleksilukujen n. juurten laskemiseen, sillä niitä tarvitaan myöhemmissä luvuissa. Tässä luvussa lähteenä on käytetty erityisesti kirjaa Introduction to Modern Algebra: A Historical Approach, josta suurin osa tuloksista löytyy. DeMoivren kaavan sekä kokonaisluvun 1 juurten määrittämisessä apuna on taas käytetty Complex Numbers and Geometry –kirjaa. Lisäksi kolmioepäyhtälöihin liittyviä lauseita osoitettaessa on lähteenä käytetty kirjaa Complex Variables and Applications. Seurauksen 3.8 sekä yleisen kompleksiluvun juurten määrittämistä koskevan lauseen olen todistanut itse.

Luvussa 4 keskitytään kolmannen asteen polynomifunktioiden nollakohtien määrittämiseen, eli kolmannen asteen polynomiyhtälöiden ratkaisemiseen. Luku keskittyy kolmannen asteen polynomiyhtälöiden yleisen ratkaisukaavan määrittämiseen sekä kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseen tätä kaavaa käyttäen. Lähteenä luvussa on käytetty kirjaa An Introduction to Abstract Algebra with Notes to the Future Teacher. Suurin osa kolmannen asteen yhtälöiden yleisen ratkaisukaavan todistuksesta on kirjoitettu tässä kirjassa esitetyn todistuksen pohjalta, mutta ratkaisukaavasta saatavien kuutiojuurten parien valintaan liittyvän säännön olen itse todistanut.

Neljännessä luvussa tutustutaan neljännen asteen yhtälöiden yleiseen ratkaisukaavaan sekä sen käyttämiseen yhtälöiden ratkaisemisessa. Ratkaisukaavan osoitus, samoin kuin kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisukaavan osoitus, on kirjoitettu kirjassa An Introduction to Abstract Algebra with Notes to the Future Teacher esitettyä todistusta mukaillen. Luvussa esitetty esimerkki on itse kehitetty kuten aiempien lukujen esimerkitkin.

Viimeisessä luvussa tutustutaan algebran peruslauseeseen, jonka avulla voidaan todeta, että mille tahansa kompleksilukukertoimiselle polynomifunktiolle voidaan löytää ainakin yksi nollakohta. Lisäksi luvussa on esitetty joitain algebran peruslauseen osoittamisessa hyödynnettäviä aputuloksia. Lausetta 6.4 sekä binomin n. potenssia koskevaa lausetta lukuun ottamatta olen todistanut nämä luvussa esitetyt aputulokset itse. Lauseen 6.4 ja binomin n. potenssia koskevan lauseen osoitukset taas on jätetty pois tutkielmasta ja ne löytyvät Real Analysis sekä Analyysia reaaliluvuilla -kirjoista. Algebran peruslauseen todistus taas on kirjoitettu kirjassa An Introduction to Abstract Algebra with Notes to the Future Teacher esitetyn todistuksen pohjalta.

2 Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomifunktio $f(x)$ on polynomifunktio, joka sisältää ainakin yhden termin, jossa muuttuja x on korotettu toiseen potenssiin. Samalla korkein muuttujan x potenssi, jonka funktio $f(x)$ sisältää, on toinen potenssi.

Määritelmä 2.1. Funktio $f(x) = ax^2 + bx + c$, jossa $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ja $b, c \in \mathbb{R}$, on *toisen asteen polynomifunktio*.

Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on nimeltään *paraabeli*. Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kerroin a määrittää paraabelin aukeamissuunnan. Kun kerroin a on negatiivinen, paraabeli aukeaa alaspäin. Jos kerroin a on positiivinen, paraabeli on ylöspäin aukeava. Lisäksi kerroin a vaikuttaa siihen, kuinka kapea paraabeli on. Kerroin c taas liikuttaa paraabelia y-akselin suunnassa.

Kun määritelmän 2.1 mukainen toisen asteen polynomifunktio asetetaan arvoltaan nollaksi, eli $ax^2 + bx + c = 0$, saadaan *normaalimuotoinen toisen asteeen polynomiyhtälö*. Ratkaisemalla tämä yhtälö voidaan selvittää määritelmän 2.1 mukaisen funktion reaaliset *nollakohdat*, eli *juuret*, joita voi olla kertoimista a, b ja c riippuen kaksi, yksi tai ei yhtään, jolloin funktion nollakohdat ovat kompleksisia.

2.1 Vaillinainen toisen asteen yhtälö

Mikäli toinen tai molemmat kertoimista b ja c asetetaan nollaksi, puhutaan *vaillinaisesta toisen asteen yhtälöstä*. Vaillinainen toisen asteen yhtälö on siis muotoa

$$ax^2 = 0, \tag{1}$$

$$ax^2 + bx = 0 \tag{2}$$

tai

$$ax^2 + c = 0. \tag{3}$$

Nämä voidaan ratkaista normaalia yhtälönratkaisua käyttäen.
Tapauksen (1) yhtälön

$$ax^2 = 0$$

ainoa ratkaisu on

$$x = 0,$$

sillä määritelmän 2.1 mukaan kerroin $a \neq 0$, jolloin jakamalla puolittain luvulla a saadaan $x^2 = 0$, eli $x = 0$.
Tapauksen (2) yhtälö

$$ax^2 + bx = 0$$

voidaan ratkaista ottamalla kummassakin polynomin termissä esiintyvä x yhteiseksi tekijäksi, eli

$$x(ax+b)=0,$$

jolloin tulon nollasäännön avulla saadaan

$$x=0 \quad \text{tai} \quad ax+b=0.$$

Lisäämällä jälkimmäisen yhtälön kummallekin puolelle termi $-b$, saadaan

$$x=0 \quad \text{tai} \quad ax=-b.$$

Jakamalla jälkimmäinen yhtälö puolittain kertoimella a, saadaan yhtälön (2) lopullisiksi ratkaisuiksi

$$x_1=0 \quad \text{tai} \quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

Tapauksen (3) yhtälö

$$ax^2+c=0$$

voidaan ratkaista lisäämällä yhtälöön ensin puolittain termi $-c$ ja jakamalla saatu yhtälö puolittain kertoimella a. Tällöin saadaan siis

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Ottamalla tästä yhtälöstä puolittain neliöjuuri, saadaan yhtälön (3) ratkaisuksi

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2.2 Täydellinen toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälö $ax^2+bx+c=0$ on *täydellinen*, jos kertoimet a, b ja c ovat kaikki nollasta eroavia. Tutkitaan tämän yhtälön ratkaisuja.

Lause 2.2. *Täydellisen toisen asteen yhtälön* $ax^2+bx+c=0$ *ratkaisu on*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Todistus. Tarkastellaan yhtälöä

$$ax^2+bx+c=0.$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain termillä $4a$, saadaan

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

josta lisäämällä yhtälön kummallekin puolelle termi $-4ac$, saadaan

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Kun tähän yhtälöön lisätään puolittain termi b^2, saadaan

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Tämän yhtälön vasen puoli on binomin neliö $(2ax+b)^2 = 4a^2x^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2$. Näin ollen yhtälö saadaan muotoon

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Ottamalla tästä yhtälöstä puolittain neliöjuuri, saadaan

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

josta lisäämällä puolittain termi $-b$, saadaan

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Näin ollen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisu saadaan jakamalla edellä oleva yhtälö termillä $2a$, siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

□

Toisen ja korkeamman asteen yhtälön ratkaisuja kutsutaan juuriksi. Lauseessa 2.2 esitetty ratkaisukaava on toisen asteen yhtälön yleinen ratkaisu, ja sillä voidaan selvittää kaikkien toisen asteen yhtälöiden juuret. Sen käyttäminen ei kuitenkaan ole mielekästä vaillinaisten yhtälöiden tapauksessa, sillä niiden ratkaiseminen on yleensä helpompaa edellisessä kappaleessa 2.1 esitetyllä tavalla.

Esimerkki 2.3. Ratkaistaan lauseen 2.2 avulla yhtälö

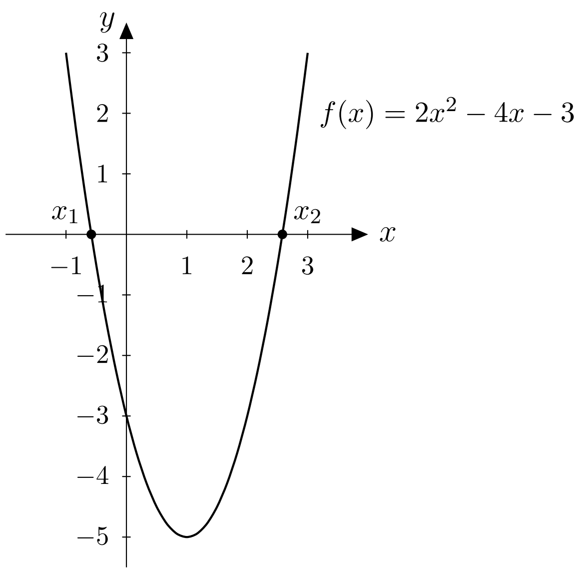
$$2x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Sijoitetaan tämän yhtälön kertoimet $a = 2$, $b = -4$ ja $c = -3$ lauseessa 2.2 esitettyyn toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 10}}{4} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} \\ &= 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Yhtälön $2x^2 - 4x - 3 = 0$ juuriksi saadaan siis

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10} \quad \text{ja} \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$



Kuva 1: Polynomin $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ kuvaaja ja nollakohdat.

Se, ovatko lauseen 2.2 avulla saadut juuret reaalisia, riippuu ratkaisukaavassa esiintyvästä lausekeesta $D = b^2 - 4ac$, jota kutsutaan *diskriminantiksi.* Jos $D > 0$, yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi eri reaalijuurta

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi reaalinen *kaksoisjuuri*

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalijuuria.

Kun normaalimuotoisen toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret tunnetaan, voidaan se jakaa tekijöihin niiden avulla.

Lause 2.4. *Toisen asteen polynomi $f(x) = ax^2 + bx + c$, jonka juuret ovat x_1 ja x_2, voidaan jakaan tekijöihin siten, että*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Todistus. Tarkastellaan ensin juuria

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Laskemalla ne yhteen saadaan

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ja edelleen

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b - \sqrt{b^2 - 4ac} + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sieventämisen jälkeen tämä juurien x_1 ja x_2 summa tulee muotoon

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \tag{4}$$

Toisaalta kertomalla juuret x_1 ja x_2 keskenään saadaan

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kertomalla lausekkeet keskenään saadaan

$$x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2},$$

josta kertomalla sulut auki saadaan

$$x_1x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}.$$

Sieventämisen jälkeen tämä lauseke tulee muotoon

$$x_1x_2 = \frac{4ac}{4a^2},$$

jolloin juurien x_1 ja x_2 tuloksi saadaan

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Tarkastellaan seuraavaksi toisen asteen polynomiyhtälöä $ax^2+bx+c=0$. Määritelmän 2.1 mukaan kerroin $a \neq 0$, joten yhtälö voidaan jakaa puolittain kertoimella a. Tällöin yhtälö tulee muotoon

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

jossa esiintyy yhtälöä (4) vastaava juurten x_1 ja x_2 summa ensimmäisen asteen termin kertoimena sekä yhtälöä (5) vastaava tulo vakioterminä. Näin ollen voidaan muodostaa yhtälö, jonka vasempana puolena on lauseke $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ja oikeana puolena toimii tämä samainen lauseke, jonka kertoimiin on sijoitettu juuret x_1 ja x_2, eli

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2.$$

Kertomalla sulut auki yhtälö saadaan muotoon

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2$$

ja ryhmittelemällä sopivasti yhtälön oikea puoli voidaan muokata muotoon

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x(x-x_1) - x_2(x-x_1),$$

eli

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x-x_1)(x-x_2).$$

Kun tämä yhtälö kerrotaan puolittain kertoimella a, yhtälön vasen puoli palautuu toisen asteen yhtälön normaalimuotoon ja saadaan

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Näin ollen toisen asteen polynomi voidaan jakaa tekijöihin siten, että

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

□

Mikäli polynomilla $f(x)$ on vain yksi kaksoisjuuri $x_{1,2}$, saadaan se lausetta 2.4 käyttäen muotoon

$$a(x - x_{1,2})(x - x_{1,2}) = a(x^2 - 2x_{1,2}x + x_{1,2}^2) = ax^2 - 2ax_{1,2}x + ax_{1,2}^2,$$

mistä se saadaan kaavaa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ käyttämällä edelleen muotoon

$$f(x) = a(x-x_{1,2})(x-x_{1,2}) = ax^2-2ax_{1,2}x+ax_{1,2}^2 = (\sqrt{a}x-\sqrt{a}x_{1,2})^2. \quad (6)$$

Esimerkki 2.5. Jaetaan toisen asteen polynomi $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ tekijöihinsä käyttäen lausetta 2.4.
Esimerkissä 2.3 tämän polynomin nollakohdiksi saatiin

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10} \quad \text{ja} \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Lauseen 2.4 perusteella polynomi $f(x) = 2x^2-4x-3$ voidaan ilmaista niiden avulla muodossa

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x - 3 \\ &= 2\left(x - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\right)\left(x - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\right) \\ &= 2\left(x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\left(x - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}\right). \end{aligned}$$

3 Kompleksiluvut ja niiden juuret

Edellisessä luvussa tarkasteltiin toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$ ratkaisujen reaalisuutta diskriminantin D lausekkeen, $D=b^2-4ac$, avulla. Tällöin huomattiin, ettei toisen asteen yhtälöiden, joiden diskriminantille saadaan $D<0$, ratkaisuja voida määritellä reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Jotta kaikille toisen asteen yhtälöille löydetään ratkaisu, on tarkasteltavaa lukujoukkoa laajennettava reaalilukujoukosta $\mathbb{R}$ *kompleksilukujoukkoon* $\mathbb{C}$. Nämä *kompleksiluvut* määritellään *imaginaariyksikön* i avulla.

Määritelmä 3.1. *Imaginaariyksikkö* i on luku, jolle on voimassa $i^2=-1$.

Määritelmä 3.2. *Kompleksiluku* $z\in\mathbb{C}$ voidaan esittää imaginaariyksikön avulla muodossa $z=a+bi$, missä $a,b\in\mathbb{R}$.

Kun $z=a+bi$, lukua a kutsutaan kompleksiluvun z *reaaliosaksi*, jolloin merkitään $\mathrm{Re}(z)=a$, ja lukua b sen *imaginaariosaksi*, jolloin merkitään $\mathrm{Im}(z)=b$. Reaalilukujen joukko on kompleksilukujoukon osajoukko, jossa kompleksilukujen imaginaariosa $b=0$. Mikäli taas kompleksiluvun reaaliosa $a=0$ ja imaginaariosa $b\neq 0$, puhutaan *puhtaasti imaginaarisista luvuista.*

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä

$$x^2-2x+4=0.$$

Tutkitaan ensin tämän yhtälön juurten reaalisuutta sijoittamalla kertoimet $a=1$, $b=-2$ ja $c=4$ diskriminantin lausekkeeseen $D=b^2-4ac$. Sijoitusten jälkeen diskriminantiksi tulee

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 4=4-16=-12<0.$$

Luvussa 2 todettiin, ettei toisen asteen yhtälöllä ole reaalisia juuria, jos diskriminantti $D<0$. Ratkaistaan tästä huolimatta yhtälö nyt käyttäen lauseen 2.2 ratkaisukaavaa

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Kun kertoimet a ja b sekä diskriminantille edellä laskettu arvo sijoitetaan tähän kaavaan, saadaan

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{-12}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{-3}}{2}=1\pm\sqrt{-3}.$$

Määritelmän 3.1 mukaan imaginaariyksikölle i on voimassa $i^2 = -1$, mistä voidaan ratkaista i, jolloin saadaan $i = \sqrt{-1}$. Näin ollen edellä saadut ratkaisut ovat kompleksisia, sillä $\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$ ja selvästi $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. Näin ollen yhtälön $x^2 - 2x + 4 = 0$ ratkaisuiksi saadaan

$$x_1 = 1 - \sqrt{-3} = 1 - \sqrt{3}\,i \quad \text{ja} \quad x_2 = 1 + \sqrt{-3} = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

Kompleksilukujen yhteen-, vähennys- ja kertolasku toteutetaan samalla tavoin kuin polynomien yhteen-, vähennys- ja kertolasku, eli

$$(a + bi) \pm (c + di) = a + bi \pm c \pm di = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

ja

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

missä a, b, c ja $d \in \mathbb{R}$. Jakolaskua suoritettaessa taas voidaan hyödyntää kompleksiluvun $z = a + bi$ *liittolukua*.

Määritelmä 3.4. Kompleksiluvun $z = a + bi$ *liittoluku*, eli *kompleksikonjugaatti*, on luku $\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i = a - bi$.

Olkoon nyt a, b, c ja $d \in \mathbb{R}$ siten, että c tai $d \neq 0$. Haluttaessa laskea kompleksilukujen $a + bi$ ja $c + di$ osamäärä, on niiden osamäärän lauseke lavennettava nimittäjän liittoluvulla, eli

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}.$$

Kertomalla sulut auki ja järjestelemällä tämä lauseke tulee muotoon

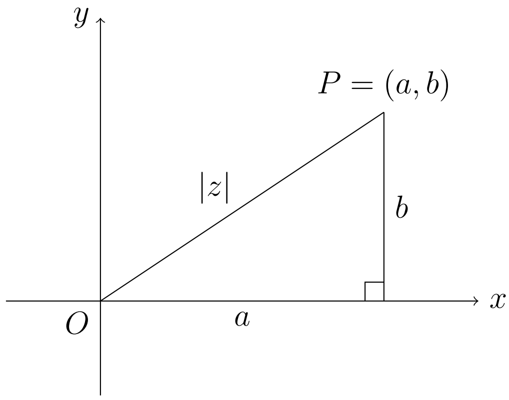
$$\frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

josta voidaan nyt erottaa saadun kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosat, jolloin saadaan

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Kompleksiluku $z = a + bi$ voidaan myös esittää reaalilukuparina (a, b), joka vastaa koordinaatiston pistettä $P = (a, b)$ tai paikkavektoria *kompleksitasossa*.

Kompleksiluvun *moduli* kuvaa sen etäisyyttä origosta kompleksitasossa. Kuvasta 2 nähdään selvästi, että tämä etäisyys voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.



Kuva 2: Kompleksiluvun $z = a + bi$ moduli $|z|$.

Määritelmä 3.5. Kompleksiluvun $z = a + bi$ *itseisarvo*, eli *moduli* on reaaliluku $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$.

Tarkastellaan seuraavaksi kahden kompleksiluvun modulien tuloa.

Lause 3.6. *Olkoon $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Kompleksilukujen z_1 ja z_2 moduleille pätee*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Todistus. Olkoon $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ siten, että $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$. Määritelmän 3.5 perusteella näiden kompleksilukujen modulit ovat muotoa

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{ja} \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Tarkastellaan nyt kompleksiluvu $z = x + yi$ ja sen liittoluvun $\overline{z} = x - yi$ tuloa. Nyt

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2$$

ja huomataan, että

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^{\,2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2}^{\,2} = |z|^2 = |\overline{z}|^2. \tag{7}$$

Lisäksi voidaan todeta, että kahden kompleksiluvun $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ liittolukujen tulo on

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i)}\,\overline{(x_2 + y_2 i)} &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\
&= x_1 x_2 - x_1 y_2 i - x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\
&= x_1 x_2 - x_1 y_1 i - x_2 y_2 i + y_1 y_2 \cdot (-1) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\
&= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i},
\end{aligned}$$

missä lauseke $(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$ vastaa kompleksilukujen z_1 ja z_2 tuloa $z_1z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)$. Näin ollen saadaan

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1z_2}. \tag{8}$$

Muodostetaan nyt tulon z_1z_2 moduli $|z_1z_2|$ ja korotetaan se toiseen yhtälöä (7) mukaillen, jolloin yhtälön (8) avulla saadaan

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}).$$

Kun tästä lausekkeesta vielä otetaan neliöjuuri, tulee

$$\sqrt{|z_1z_2|^2} = |z_1z_2| = \sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = \sqrt{|z_1|^2}\sqrt{|z_2|^2} = |z_1||z_2|$$

ja voidaan näin ollen todeta, että $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$. $\square$

Johdetaan seuraavaksi kompleksilukujen z ja w moduleille kolmioepäyhtälö.

Lause 3.7. *Kompleksiluvuille $z, w \in \mathbb{C}$ on voimassa kolmioepäyhtälö*

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Todistus. Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$ ja $z = x + yi$ sekä $w = a + bi$. Todistetaan ensin oikeanpuoleinen epäyhtälö $|z + w| \leq |z| + |w|$. Yhtälöä (7) käyttäen saadaan kompleksilukujen z ja w summan moduliksi

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}),$$

sillä määritelmän 3.4 avulla saadaan

$$\overline{z} + \overline{w} = (x - yi) + (a - bi) = x - yi + a - bi = (x + a) - (y + b)i = \overline{z + w}.$$

Kun modulin $|z + w|$ neliön lausekkeen oikealta puolelta avataan sulut, saadaan yhtälön (7) avulla

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + (z\overline{w} + \overline{z}w) + |w|^2.$$

Nyt

$$z\overline{w} + \overline{z}w = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}},$$

missä määritelmästä 3.4 saadaan $z\overline{w} = \mathrm{Re}(z\overline{w}) + \mathrm{Im}(z\overline{w})$ ja $\overline{z\overline{w}} = \mathrm{Re}(z\overline{w}) - \mathrm{Im}(z\overline{w}))$, jolloin

$$z\overline{w} + \overline{z}w = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = \mathrm{Re}(z\overline{w}) + \mathrm{Im}(z\overline{w}) + \mathrm{Re}(z\overline{w}) - \mathrm{Im}(z\overline{w})) = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

Määritelmää 3.5 ja yhtälöä (7) sekä lausetta 3.6 käyttämällä saadaan

$$2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq 2\sqrt{\mathrm{Re}(z\overline{w})^2 + \mathrm{Im}(z\overline{w})^2} = 2|z\overline{w}| = 2|z||\overline{w}| = 2|z||w|,$$

sillä

$$|\overline{w}| = \sqrt{(\mathrm{Re}(w))^2 + (-\,\mathrm{Im}(w))^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(w))^2 + (\mathrm{Im}(w))^2} = |w|.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}|z+w|^2 = |z|^2 + (z\overline{w} + \overline{z}w) + |w|^2 &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 .\end{aligned}$$

Ottamalla tästä epäyhtälöstä puolittain neliöjuuri saadaan

$$\sqrt{|z+w|^2} = |z+w| \leq \sqrt{(|z| + |w|)^2} = |z| + |w|.$$

ja saadaan siis epäyhtälö

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Todistetaan vielä kolmioepäyhtälön $|z| - |w| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$ vasemmanpuoleinen epäyhtälö $|z| - |w| \leq |z+w|$. Aloitetaan kompleksiluvun z itseisarvosta ja lisätään sen sisään nolla, eli

$$|z| = |z + w - w| = |(z+w) + (-w)|.$$

Käyttämällä edellä johdettua kolmioepäyhtälöä $|z+w| \leq |z| + |w|$ saadaan

$$|z| = |(z+w) + (-w)| \leq |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|,$$

sillä $|-w| = |w| \geq 0$. Vähennetään nyt muodostetusta epäyhtälöstä $|z| \leq |z+w| + |w|$ puolittain $|w|$, jolloin saadaan epäyhtälö

$$|z| - |w| \leq |z+w|.$$

Näin ollen kolmioepäyhtälö $|z| - |w| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$ pätee. $\square$

Johdetaan kolmioepäyhtälön $|z+w| \leq |z|+|w|$ avulla vielä sille yleisempi useamman termin summakaava.

Seuraus 3.8. *Olkoon $n = 1, 2, \ldots$. Tällöin kompleksilukujen $z_k \in \mathbb{C}$ moduleille on voimassa summakaava*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Todistus. Tämä kaava on lauseen 3.7 kolmioepäyhtälön $|z+w| \leq |z| + |w|$ yleistys, joka voidaan todistaa induktiolla. Lausetta 3.7 todistettaessa todettiin jo, että kaava pitää paikkansa arvolla $n = 2$, eli

$$\left|\sum_{k=1}^{2} z_k\right| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

joten voidaan siirtyä suoraan tekemään induktio-oletusta. Olkoon siis väite tosi arvolle $n = m$, eli

$$\left|\sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |z_k|.$$

Olkoon nyt $n = m + 1$. Tällöin

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} z_k\right| = \left|z_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} z_k\right|.$$

Lauseen 3.7 kolmioepäyhtälöä $|z+w| \leq |z| + |w|$ käyttämällä voidaan z_{m+1} erottaa tästä summasta, jolloin se tulee muotoon

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} z_k\right| = \left|z_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq |z_{m+1}| + \left|\sum_{k=1}^{m} z_k\right|.$$

Induktio-oletuksen avulla tämä summa saadaan edelleen muotoon

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} z_k\right| = \left|z_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq |z_{m+1}| + \left|\sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq |z_{m+1}| + \sum_{k=1}^{m} |z_k| = \sum_{k=1}^{m+1} |z_k|.$$

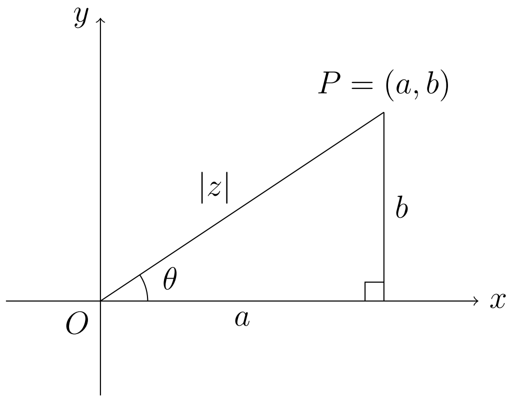
Näin ollen kaavan on oltava voimassa kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja tämä seuraus on siis todistettu. $\square$

Näitä kolmioepäyhtälöitä ja niistä seuraavaa summakaavaa tarvitaan myöhemmin. Jatketaan nyt kuitenkin kompleksilukujen yleisempää tarkastelua.

Määritelmä 3.9. Kompleksiluvun $z = a+bi$ *argumentti* $\arg(z)$ on kompleksitasossa positiivisen x-akselin ja janan OP, missä $P = (a, b)$, välinen kulma θ vastapäivään kierrettäessä. Argumentti voidaan laskea arkustangettia käyttäen, jolloin $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) = \theta$.

Käyttämällä kompleksiluvun argumenttia ja modulia sille voidaan muodostaa *napakoordinaattiesitys*. Nyt

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right).$$



Kuva 3: Kompleksiluvun $z = a + bi$ argumentti $\arg(z) = \theta$.

Kuvasta 3 nähdään, että $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$ ja $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$. Näin ollen

$$z = a + bi = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

missä $|z|$ ja θ ovat siis kompleksiluvun z moduli ja argumentti. Samalla voidaan todeta, että kompleksiluvun z argumentti voidaan selvittää myös ratkaisemalla yhtälöt $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ ja $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$.

Tämä napakoordinaattiesitys on huomattavasti käyttökelpoisempi laskettaessa esimerkiksi kompoleksilukujen juuria. Ennen kuin näitä juuria kuitenkaan päästään laskemaan on syytä tutustua myös DeMoivren kaavana tunnettuun kompleksilukujen potensseja koskevaan kaavaan.

Lause 3.10. *Olkoon* $m \in \mathbb{Z}$. *Tällöin* $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$.

Todistus. Todistetaan lause induktiota käyttäen. Arvolla $m = 1$ lause on tosi, sillä

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^1 &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= \cos(1\cdot\theta) + i\sin(1\cdot\theta).\end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että lause on tosi, kun $m = r - 1$, missä $r \in \mathbb{Z}$ siten, että $r > 1$. Tällöin

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{r-1} = \cos((r-1)\theta) + i\sin((r-1)\theta).$$

Tutkitaan nyt lauseketta arvolla $m = r$. Nyt

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^r = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{r-1}.$$

Oletuksen $(\cos\theta + i\sin\theta)^{r-1} = \cos((r-1)\theta) + i\sin((r-1)\theta)$ perusteella tämä saadaan muotoon

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^r =& (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos((r-1)\theta) + i\sin((r-1)\theta))\\ =& \cos\theta\cdot\cos((r-1)\theta) + i\cos\theta\cdot\sin((r-1)\theta)\\ &+ i\sin\theta\cdot\cos((r-1)\theta) + i^2\sin\theta\cdot\sin((r-1)\theta)\\ =& \cos\theta\cdot\cos((r-1)\theta) - \sin\theta\cdot\sin((r-1)\theta)\\ &+ i(\sin\theta\cdot\cos((r-1)\theta) + \cos\theta\cdot\sin((r-1)\theta)).\end{aligned}$$

Sinin ja kosinin summakaavojen $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$ ja $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$ avulla tästä saadaan

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^r &= \cos(\theta + (r-1)\theta) + i\sin(\theta + (r-1)\theta)\\ &= \cos(r\theta) + i\sin(r\theta).\end{aligned}$$

Näin ollen lause on tosi, kun $m \in \mathbb{Z}_+$.

Tarkastellaan seuraavaksi arvoa $m = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1&\\ &= \cos(0\cdot\theta) + i\sin(0\cdot\theta)\end{aligned}$$

ja lause on selvästi tosi.

Tutkitaan vielä negatiivisia eksponentteja $m \in \mathbb{Z}_-$. Tällöin merkitään $m = -n$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Nyt kompleksiluvulle $z = \cos\theta + i\sin\theta$ on voimassa

$$z^{-n} = (z^n)^{-1}, \text{ eli } (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = ((\cos\theta) + i\sin\theta)^n)^{-1}.$$

Edellä jo todettiin, että $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Näin ollen

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))^{-1}\\ &= \frac{1}{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}\\ &= \frac{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))}\\ &= \frac{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{\cos^2(n\theta) - i\sin(n\theta)\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\cos(n\theta) - i^2\sin^2(n\theta)}\\ &= \frac{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)}.\end{aligned}$$

Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tulee tämä muotoon

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \frac{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{1} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta),$$

mistä hyödyntämällä kaavoja $\cos(-x) = \cos x$ ja $\sin(-x) = -\sin x$ saadaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Lause on siis tosi myös negatiivisilla eksponenteilla ja näin ollen tosi kaikilla arvoilla $m \in \mathbb{Z}$. $\square$

Nyt, kun käytössä on tapa käsitellä kompleksilukujen potensseja, voidaan siirtyä tarkastelemaan niiden juuria, joiden määrittelyssä nämä potenssit ovat merkittävässä roolissa. Näitä juuria tarkasteltaessa on syytä muistaa, ettei esimerkiksi luvun 1 neliöjuurikaan ole yksikäsitteinen. Tilanteesta riippuen se voi olla 1 tai ± 1. Tästä johtuen on syytä määritellä *n. juuri* kompleksiluvulle z sen juurten n. potenssin kautta.

Määritelmä 3.11. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z, w \in \mathbb{C}$. Mikäli w ja z toteuttavat yhtälön $z = w^n$, on w kompleksiluvun z *n. juuri*.

Palataan vielä edellä mainittuihin luvun 1 juuriin.

Lause 3.12. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja*

$$\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Tällöin luvun 1 n. juuret ovat muotoa

$$\{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \dots, \zeta^{n-1}\}.$$

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z \in \mathbb{C}$ luvun 1 eräs n. juuri. Tällöin määritelmän 3.11 mukaisesti voidaan merkitä

$$z^n = (|z|(\cos\theta + i\sin\theta))^n = 1.$$

Lauseen 3.10 perusteella z^n saadaan muotoon

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \end{aligned}$$

eli voidaan merkitä

$$|z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi).$$

Jotta nämä luvut olisivat samat on niiden modulien oltava samat, eli

$$|z|^n = 1,$$

mistä saadaan

$$|z| = \sqrt[n]{1} = 1.$$

Lisäksi on oltava voimassa

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi).$$

Juuren z argumentti θ voidaan siis määrittää ratkaisemalla yhtälöt

$$\cos(n\theta) = \cos(2\pi) \text{ ja } \sin(n\theta) = \sin(2\pi).$$

Sinin ja kosinin jaksollisuuden perusteella kummankin yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$n\theta = 2\pi k,$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Tästä saadaan edelleen

$$\theta = \frac{2\pi k}{n}.$$

Merkitään näin luvulle 1 saatuja juuria

$$\begin{aligned} z_k &= |z| \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right). \end{aligned}$$

Lausetta 3.10 käyttäen voidaan todeta näiden juurten toteuttavan yhtälön $z^n = 1$, sillä

$$\begin{aligned} z_k^n &= \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k\right)^n \\ &= \left(\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n\right)^k \\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right)\right)^k \\ &= (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))^k = 1^k = 1. \end{aligned}$$

Todistetaan vielä, että $0 \leq k \leq n-1$. Olkoon nyt k' sellainen luku, jolle

$$k' \equiv k \pmod{n},$$

eli

$$\frac{k'-k}{n}=j,$$

missä $j \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq k \leq n-1$. Tästä saadaan edelleen

$$k' = k + jn.$$

Merkitään nyt

$$z_{k'} = \cos\left(\frac{2\pi k'}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k'}{n}\right).$$

Mikäli voidaan osoittaa, että $z_{k'} = z_k$, voidaan todeta, että kaikki juuren z_k toisistaan eroavat arvot saadaan kertoimen k arvoilla $0 \leq k \leq n-1$. Sijoitetaan nyt lauseke $k' = k + jn$, jolloin

$$\begin{aligned} z_{k'} &= \cos\left(\frac{2\pi(k+jn)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+jn)}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi jn}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi jn}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi j\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n} + 2\pi j\right). \end{aligned}$$

Sinin ja kosinin jaksollisuudesta johtuen saadaan

$$z_{k'} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Tämä taas vastaa luvun 1 juurille z_k edellä johdettua lauseketta ja näin ollen

$$z_{k'} = z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Lauseen 3.10 perusteella voidaan vielä todeta, että

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k.$$

Merkitään nyt

$$\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

jolloin voidaan todeta luvun 1 n. juurten olevan muotoa $\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}\}$.

□

Lauseen 3.12 avulla voidaan siis selvittää kaikki luvun 1 juuret. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä luvun 1 kuutiojuurten määrittämisestä. Niitä tullaan myöhemmin tarvitsemaan kolmannen asteen yhtälöitä ratkaistaessa.

Esimerkki 3.13. Selvitetään nyt kaikki luvun 1 kuutiojuuret. Lauseen 3.12 perusteella eräs niistä on

$$\zeta = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right).$$

Merkitään nyt $\omega = \zeta = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$, jolloin toinen kolmesta juuresta saadaan laskemalla ω^2. Käyttämällä lausetta 3.10, ω^2 saadaan muotoon

$$\omega^2 = \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right).$$

Viimeinen kolmesta juuresta on $\omega^0 = 1$.

Ilmoitetaan nämä juuret ω ja ω^2 vielä muodossa $a + bi$. Koska $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, juuren ω arvoksi tulee

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Juuren ω^2 arvoksi taas saadaan

$$\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

sillä $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$.

Näin ollen luvun 1 kuutiojuuret ovat 1, $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ja $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Kun luvun 1 juuret nyt tunnetaan, voidaan niiden avulla johtaa kaikkien muidenkin kompleksilukujen z juuret.

Lause 3.14. *Olkoon $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ja*

$$\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Tällöin kompleksiluvun z n. juuret ovat muotoa

$$\left\{ \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\zeta^k \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\},$$

missä θ on kompleksiluvun z argumentti ja $\sqrt[n]{|z|}$ on n. juuri kompleksiluvun z modulista.

Todistus. Yleisen kompleksiluvun z juurten johtaminen on hyvin samankaltainen prosessi kuin luvun 1 juurten johtaminen. Olkoon $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ eräs kompleksiluvun $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ n. juurista. Tällöin määritelmän 3.11 perusteella sille on oltava voimassa

$$w^n = (|w|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

Lauseen 3.10 avulla kompleksiluvun w potenssi w^n voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} w^n &= (|w|(\cos\phi + i\sin\phi))^n \\ &= |w|^n (\cos\phi + i\sin\phi)^n \\ &= |w|^n (\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) . \end{aligned}$$

Jotta kompleksiluvut w^n ja z olisivat yhtenevät, on ensinnäkin niiden modulien oltava samat, eli

$$|w|^n = |z|,$$

jolloin juuren w moduliksi tulee

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}.$$

Samalla on oltava voimassa

$$\cos(n\phi) + i\sin(n\phi) = \cos\theta + i\sin\theta,$$

mistä saadaan yhtälöt

$$\cos(n\phi) = \cos\theta \text{ ja } \sin(n\phi) = \sin\theta.$$

Molempien näiden yhtälöiden ratkaisuksi saadaan sinin ja kosinin jaksollisuuden perusteella $n\phi = \theta + 2\pi k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tästä yhtälöstä kompleksiluvun w argumentiksi ϕ saadaan

$$\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Olkoon tämä edellä löydetty juuri nyt w_k, jonka napakoordinaattiesitys on siis

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

Osoitetaan vielä, että $0 \leq k \leq n-1$. Olkoon nyt k' sellainen luku, jolle

$$k' \equiv k \pmod{n},$$

eli

$$\frac{k' - k}{n} = j,$$

missä $j \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq k \leq n-1$. Tästä saadaan edelleen

$$k' = k + jn.$$

Olkoon nyt

$$w_{k'} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k'}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k'}{n}\right)\right).$$

Samaan tapaan kuin luvun 1 juuria johdettaessa todettiin, mikäli voidaan osoittaa, että $w_{k'} = w_k$, löytyvät kaikki kompleksiluvun z toisistaan eroavat juuret kertoimen k arvoilla $0 \leq k \leq n-1$. Sijoitetaan nyt lauseke $k' = k+jn$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
w_{k'} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+jn)\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+jn)\right)\right) \\
&= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi jn}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi jn}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi j\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi j\right)\right).
\end{aligned}$$

Sinin ja kosinin jaksollisuuden seurauksena voidaan todeta, että

$$w_{k'} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) = w_k.$$

Näin ollen $w_{k'} = w_k$.

Tutkitaan vielä juurille w_k saatua lauseketta. Sinin ja kosinin summakaavojen $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ ja $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ perusteella w_k saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt[n]{|z|}\Bigg(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&\quad + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\Bigg) \\
&= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Nyt huomataan, että $\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)$ vastaa lauseessa 3.12 esitettyä luvun 1 juurta ζ^k. Näin ollen

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\zeta^k,$$

jolloin yleisen kompleksiluvun $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ n. juuret saadaan muotoon

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \zeta^k \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}.$$

$\square$

Lauseen 3.14 perusteella kompleksiluvulle $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ voidaan laskea eräs n. juuri $w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$, joka toteuttaa yhtälön $z = w^n$. Kompleksilukujen joukossa tällä yhtälöllä on kuitenkin n ratkaisua. Loput näistä ratkaisuista löydetään kertomalla juuri w lauseen 3.12 mukaisilla luvun 1 n. juurilla $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$, missä $\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Näin ollen kompleksiluvun z kaikki n. juuret ovat muotoa $1w, \zeta w, \zeta^2 w, \ldots, \zeta^{n-1} w$.

4 Kolmannen asteen polynomifunktio

Samoin kuin toisen asteen polynomifunktioiden tapauksessa, kolmannen asteen polynomifunktiot ovat polynomifunktioita, jotka sisältävät ainakin yhden termin, jossa funktion muuttuja on korotettu kolmanteen potenssiin. Samalla kolmas potenssi on korkein muuttujan potenssi, joka funktiossa esiintyy.

Määritelmä 4.1. Funktio $f(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$, missä $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, on *kolmannen asteen polynomifunktio*, kun kerroin $a' \neq 0$.

Kolmannen asteen polynomifunktion nollakohtia voidaan etsiä asettamalla sen arvo nollaksi, jolloin saadaan *kolmannen asteen polynomiyhtälö*

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0. \tag{9}$$

Koska määritelmän 4.1 mukaan kerroin $a' \neq 0$, voidaan yhtälö jakaa puolittain kertoimella a', jolloin saadaan

$$x^3 + \frac{b'}{a'}x^2 + \frac{c'}{a'}x + \frac{d'}{a'} = 0.$$

Saadut kertoimet $\frac{b'}{a'}$, $\frac{c'}{a'}$ ja $\frac{d'}{a'}$ ovat vakioita ja voidaan merkitä $\frac{b'}{a'} = a$, $\frac{c'}{a'} = b$ ja $\frac{d'}{a'} = c$, missä a, b ja $c \in \mathbb{R}$. Ratkaistavaksi yhtälöksi jää siis

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{10}$$

Jotta tämä yhtälö voidaan ratkaista, täytyy yhtälöä yksinkertaistaa poistamalla siitä toisen asteen termi. Tämä tapahtuu sijoittamalla muuttujan x paikalle $x = y - \frac{a}{3}$, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0.$$

Tästä saadaan

$$(y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot \frac{a}{3} + 3 \cdot y \cdot \frac{a^2}{3^2} - \frac{a^3}{3^3}) + a(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3^2}) + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0.$$

Kertomalla sulut auki yhtälö saadaan muotoon

$$(y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3) + (ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3) + (by - \frac{1}{3}ab) + c = 0.$$

Kun tätä yhtälöä sievennetään ja termit ryhmitellään muuttujan y potenssien mukaan, saadaan

$$y^3 + (a - a)y^2 + (b - \frac{1}{3}a^2)y + (c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3) = 0.$$

Nyt toisen asteen termin kertoimeksi saadaan $(a - a) = 0$. Merkitään jäljelle jääviä kertoimia siten, että $(b - \frac{1}{3}a^2) = p$ ja $(c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3) = q$, jolloin kolmannen asteen polynomiyhtälö saa suppean muodon

$$y^3 + py + q = 0. \tag{11}$$

Yhtälö on nyt saatu muotoon, joka voidaan ratkaista. Mikäli toinen tai molemmat kertoimista p ja q ovat arvoltaan nolla, yhtälö voidaan ratkaista tulon nollasääntöä ja neliöjuurta tai kuutiojuurta hyödyntäen.
Jos $p = 0$ tulee yhtälö (11) muotoon

$$y^3 + q = 0,$$

mistä saadaan

$$y^3 = -q,$$

ja edelleen

$$y = \sqrt[3]{-q}.$$

Jos taas $q = 0$ saadaan yhtälö (11) muotoon

$$y^3 + py = y(y^2 + p) = 0,$$

jolloin tulon nollasäännöllä saadaan

$$y = 0 \quad \text{tai} \quad y^2 + p = 0.$$

Jälkimmäinen yhtälö voidaan ratkaista neliöjuuren avulla, jolloin tulee

$$y = \pm\sqrt{-p}.$$

Tällöin yhtälöllä on siis kolme ratkaisua

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -\sqrt{-p} \quad \text{ja} \quad y_3 = \sqrt{-p}.$$

Mikäli on $p = q = 0$, yhtälö (11) tulee muotoon

$$y^3 = 0,$$

mistä saadaan ratkaisuksi

$$y = 0.$$

Olkoon nyt $p, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tällöin yhtälön $y^3 + py + q = 0$ kertoimet p ja q ovat molemmat nollasta eroavia ja voidaan tutkia sen ratkaisuja niiden suhteen.

Lause 4.2. *Olkoon $p, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tällöin kolmannen asteen polynomiyhtälön $y^3 + py + q = 0$ ratkaisut ovat*

$$y_1 = A + B, \quad y_2 = \omega A + \omega^2 B \quad ja \quad y_3 = \omega^2 A + \omega B.$$

Tässä A on jokin juurista $\{\sqrt[3]{t_1}, \omega\sqrt[3]{t_1}, \omega^2\sqrt[3]{t_1}\}$ ja B taas jokin juurista $\{\sqrt[3]{t_2}, \omega\sqrt[3]{t_2}, \omega^2\sqrt[3]{t_2}\}$, missä

$$t_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad ja \quad t_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Kertoimet $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ja $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ taas ovat esimerkissä 3.13 esitetyt luvun 1 kompleksiset kuutiojuuret. Lisäksi juuret A ja B on valittu siten, että ne toteuttavat ehdon

$$AB = -\frac{p}{3}.$$

Todistus. Tarkastellaan yhtälöä

$$y^3 + py + q = 0.$$

Tarkoituksena on saattaa tämä yhtälö sellaiseen muotoon, että sille voidaan löytää ratkaisu ottamalla tiettyjä neliö- ja kuutiojuuria. Esitetään tätä varten muuttuja y uusien muuttujien u ja v avulla siten, että

$$y = u + v. \tag{12}$$

Sijoitetaan nyt tämä muuttujien u ja v summa yhtälöön (11) muuttujan y paikalle, jolloin saadaan

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Kun $u + v$ korotetaan kolmanteen potenssiin, yhtälö saa muodon

$$(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + p(u + v) + q = 0,$$

josta edelleen järjestelemällä saadaan

$$u^3 + v^3 + (3u^2v + 3uv^2) + p(u + v) + q = 0.$$

Kun suluissa olevien termien yhteiseksi tekijäksi otetaan $3uv$, yhtälö saadaan muotoon

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0.$$

Määrätään nyt muuttujille u ja v lisäehto, jonka avulla tätä yhtälöä voidaan edelleen yksinkertaistaa. Asetetaan siis

$$3uv = -p. \tag{13}$$

Kun muuttujille u ja v asetetaan tämä ehto, on huomattava, ettei se päde tilanteessa $u = 0$ tai $v = 0$, sillä oletuksen nojalla $p \neq 0$. Toisaalta tilanteiden, joissa $u = 0$ tai $v = 0$, tarkastelu ei ole järkevää myöskään yhtälön (12) kannalta. Näin ollen voidaan olettaa, että $u \neq 0$ ja $v \neq 0$ ja siten muuttuja v voidaan esittää ehdon (13) nojalla muuttujaa u käyttäen muodossa $v = -\frac{p}{3u}$. Nyt yhtälöä $u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q = 0$ voidaan sieventää käyttäen ehtoa (13), jolloin tulee

$$3uv(u + v) = -p(u + v)$$

ja saadaan

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= u^3 + v^3 - p(u + v) + p(u + v) + q \\ &= u^3 + v^3 + q \\ &= 0, \end{aligned}$$

mistä saadaan edelleen

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{14}$$

Muodostetaan nyt lauseen 2.4 avulla tekijöihin jaettu toisen asteen yhtälö, jonka muuttujana toimii t ja ratkaisuina ovat u^3 ja v^3, siis

$$(t - u^3)(t - v^3) = t^2 - v^3t - u^3t + u^3v^3 = 0.$$

Kun ensimmäisen asteen termit yhdistetään, tämä yhtälö saa muodon

$$t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3 = 0.$$

Ehtoa (13) käyttäen saadaan muodostetun toisen asteen yhtälön vakiotermi muotoon

$$u^3v^3 = (uv)^3 = \left(\frac{3uv}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Yhtälöstä (14) taas saadaan $(u^3 + v^3) = -q$. Näin ollen

$$t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3 = t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{15}$$

Lauseen 2.2 ratkaisukaavalla tämän toisen asteen yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(-\frac{p^3}{27})}}{2},$$

eli

$$t = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4(-\frac{p^3}{27})}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{2^2}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Merkitään nyt

$$t_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{ja} \quad t_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Toisaalta tämä samainen toisen asteen yhtälö muodostettiin siten, että sen ratkaisut ovat u^3 ja v^3. Näin ollen voidaan merkitä

$$u^3 = t_1 \quad \text{ja} \quad v^3 = t_2.$$

Muuttujat u ja v voidaan nyt ratkaista kuutiojuurta käyttäen. Lauseen 3.14 perusteella näillä yhtälöillä on kummallakin kolme juurta, joista ensimmäiset ovat

$$u = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{ja} \quad v = \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Loput juuret saadaan kertomalla muuttujille u ja v edellä saadut arvot esimerkissä 3.13 esitetyillä luvun 1 kuutiojuurilla

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ja} \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Toisin sanoen, kaikki muuttujalle u saatavat arvot ovat $\sqrt[3]{t_1}$, $\omega\sqrt[3]{t_1}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_1}$ ja muuttujalle v saatavat arvot ovat $\sqrt[3]{t_2}$, $\omega\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_2}$.

Tutkitaan nyt, mitkä muuttujien u ja v saamista arvoista toteuttavat muuttujille u ja v asetetun ehdon (13), josta saadaan edelleen $uv = -\frac{p}{3}$. Todetaan kuitenkin ensin, että tällaiset arvot löytyvät. Edellä muuttujien u ja v arvot johdettiin käyttäen muuttujalle t muodostettua toisen asteen yhtälöä $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, jonka ratkaisuina toimivat u^3 ja v^3. Nyt voidaan hyödyntää yleisen toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisujen x_1 ja x_2 tulolle lauseen 2.4 todistuksen yhteydessä johdettua kaava (5), jonka mukaan $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Sijoittamalla tähän kaavaan yhtälön $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ kertoimet $a = 1$ ja $c = -\frac{p^3}{27}$ sekä ratkaisut $t_1 = u^3$ ja $t_2 = v^3$ saadaan

$$t_1t_2 = u^3v^3 = \frac{\frac{-p^3}{27}}{1} = -\frac{p^3}{27}.$$

Kun tästä otetaan puolittain kuutiojuuri, saadaan lauseen 3.14 perusteella muuttujien u ja v tulolle kolme arvoa

$$uv = -\frac{p}{3},\ uv = -\frac{\omega p}{3} \text{ sekä } uv = -\frac{\omega^2 p}{3}.$$

Näin ollen muuttujien $u = \{\sqrt[3]{t_1}, \omega\sqrt[3]{t_1}, \omega^2\sqrt[3]{t_1}\}$ ja $v = \{\sqrt[3]{t_2}, \omega\sqrt[3]{t_2}, \omega^2\sqrt[3]{t_2}\}$ saamien arvojen joukosta on löydettävissä arvot, joilla ehto (13) toteutuu.

Valitaan nyt muuttujien u ja v arvojen joukosta sellaiset arvot, joilla ehto (13) toteutuu, eli $uv = -\frac{p}{3}$. Olkoon A jokin muuttujalle u saaduista arvoista $\sqrt[3]{t_1}$, $\omega\sqrt[3]{t_1}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_1}$. Merkitään lisäksi muita muuttujan u arvoja tuloilla ωA ja $\omega^2 A$. Mikäli juuren A valinta tehtiin siten, että $A = \sqrt[3]{t_1}$, saadaan

$$\omega A = \omega\sqrt[3]{t_1} \quad \text{ja} \quad \omega^2 A = \omega^2\sqrt[3]{t_1}.$$

Jos taas tämä valinta tehtiin siten, että $A = \omega\sqrt[3]{t_1}$, on oltava

$$\omega A = \omega \cdot \omega\sqrt[3]{t_1} = \omega^2\sqrt[3]{t_1} \quad \text{ja} \quad \omega^2 A = \omega^2 \cdot \omega\sqrt[3]{t_1} = \omega^3\sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{t_1},$$

sillä määritelmän 3.11 perusteella luvun 1 kuutiojuurille ω ja ω^2 on oltava $\omega^3 = 1$.
Valinnalla $A = \omega^2\sqrt[3]{t_1}$ saadaan niin ikään

$$\omega A = \omega \cdot \omega^2\sqrt[3]{t_1} = \omega^3\sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{t_1} \quad \text{ja} \quad \omega^2 A = \omega^2 \cdot \omega^2\sqrt[3]{t_1} = \omega^3 \cdot \omega\sqrt[3]{t_1} = \omega\sqrt[3]{t_1}.$$

Näin ollen kaikki muuttujan u saamat arvot voidaan ilmaista tuloilla A, ωA ja $\omega^2 A$ riippumatta siitä, miten juuri A valitaan. Valitaan juurelle A nyt pariksi muuttujan v saamien arvojen $\sqrt[3]{t_2}$, $\omega\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_2}$ joukosta se, jolla ehto (13) toteutuu, ja merkitään sitä juurella B. Merkitään vielä kahta jäljelle jäävää muuttujan v arvoa tuloilla ωB ja $\omega^2 B$, jotka riippuvat juuren B valinnasta samaan tapaan kuin edellä juurten ωA ja $\omega^2 A$ arvot riippuvat juuren A valinnasta. Tutkitaan vielä, mitkä muuttujien u ja v arvot toteuttavat ehdon (13).
Koska juuret A ja B valittiin siten, että ne toteuttavat ehdon $uv = -\frac{p}{3}$, on oltava

$$AB = -\frac{p}{3}. \tag{16}$$

Yhtälön (16) avulla huomataan, että arvoilla A ja ωB sekä ωA ja B tulo uv tulee muotoon

$$A(\omega B) = (\omega A)B = \omega AB = -\frac{\omega p}{3} \neq -\frac{p}{3}.$$

Arvoilla $\omega^2 A$ ja $\omega^2 B$ taas tuloksi uv tulee

$$(\omega^2 A)(\omega^2 B) = (\omega^2\omega^2)AB = \omega^3(\omega AB) = \omega AB = -\frac{\omega p}{3} \neq -\frac{p}{3},$$

sillä määritelmän 3.11 perusteella $\omega^3 = 1$.
Arvoilla A ja $\omega^2 B$ sekä $\omega^2 A$ ja B tästä tulosta uv saadaan

$$A(\omega^2 B) = (\omega^2 A)B = \omega^2 AB = -\frac{\omega^2 p}{3} \neq -\frac{p}{3},$$

kun taas arvoilla ωA ja $\omega^2 B$ sekä $\omega^2 A$ ja ωB saadaan

$$(\omega A)(\omega^2 B) = (\omega^2 A)(\omega B) = (\omega\omega^2)AB = \omega^3(AB) = AB = -\frac{p}{3}.$$

Kun kaikki muuttujien u ja v saamien arvojen joukosta muodostettavat parit on nyt tutkittu, voidaan todeta, että ehdon $uv = -\frac{p}{3}$ täyttävät vain parit A ja B, ωA ja $\omega^2 B$ sekä $\omega^2 A$ ja ωB.

Näitä pareja käyttäen voidaan nyt selvittää ne muuttujan y arvot, jotka toteuttavat yhtälön (11). Koska muuttujat u ja v määriteltiin yhtälöllä (12) siten, että $y = u + v$, saadaan muuttujalle y kolme arvoa. Nämä arvot ovat

$$\begin{aligned} y_1 &= A + B, \\ y_2 &= \omega A + \omega^2 B \quad \text{ja} \\ y_3 &= \omega^2 A + \omega B, \end{aligned}$$

missä A on jokin juurista $\{\sqrt[3]{t_1}, \omega\sqrt[3]{t_1}, \omega^2\sqrt[3]{t_1}\}$ ja B on jokin juurista $\{\sqrt[3]{t_2}, \omega\sqrt[3]{t_2}, \omega^2\sqrt[3]{t_2}\}$, missä

$$t_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{ja} \quad t_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

ja juuret A ja B on valittu siten, että ne toteuttavat ehdon

$$AB = -\frac{p}{3}.$$

Kertoimet $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ja $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ taas ovat luvun 1 kompleksiset kuutiojuuret.

$\square$

On syytä huomata, että lauseessa 4.2 esitetty ratkaisutapa antaa ratkaisut yhtälölle $y^3+py+q = 0$. Mikäli ratkaistava yhtälö on muotoa $x^3+ax^2+bx+c = 0$, on muistettava, että yhtälöön tehtiin sijoitus $x = y - \frac{a}{3}$ ja näin ollen ratkaisut ovat

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3}, \; x_2 = y_2 - \frac{a}{3} \quad \text{ja} \quad x_3 = y_3 - \frac{a}{3}.$$

Tarkastellaan nyt kolmannen asteen yhtälöille esitetyn ratkaisumenetelmän käyttöä esimerkin avulla.

Esimerkki 4.3. Ratkaistaan yhtälö $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{17}{6}x - \frac{55}{54} = 0$ käyttäen lauseessa 4.2 esitettyä menetelmää.

Ensin yhtälöä on muokattava yhtälöä (11) vastaavaan muotoon, jossa kolmannen asteen termin kerroin on yksi ja toisen asteen termin kerroin on nolla. Aloitetaan siis jakamalla yhtälö puolittain luvulla $\frac{1}{2}$. Tällöin yhtälö tulee muotoon

$$x^3 - x^2 - \frac{17}{3}x - \frac{55}{27} = 0.$$

Poistetaan nyt toisen asteen termi tekemällä sijoitus $x = y - \frac{a}{3}$, missä a on toisen asteen termin kerroin, eli $a = -1$. Sijoitetaan siis yhtälöön muuttujan x paikalle $x = y + \frac{1}{3}$, jolloin saadaan

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{17}{3}\left(y + \frac{1}{3}\right) - \frac{55}{27} = 0.$$

Suorittamalla potenssiinkorotukset tulee yhtälö muotoon

$$\left(y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27}\right) - \left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - \frac{17}{3}\left(y + \frac{1}{3}\right) - \frac{55}{27} = 0.$$

Kerrotaan sulut nyt auki ja järjestellään termit niiden asteen mukaan, eli

$$\begin{aligned}
&\left(y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27}\right) - \left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - \frac{17}{3}\left(y + \frac{1}{3}\right) - \frac{55}{27} \\
&= y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27} - y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{9} - \frac{17}{3}y - \frac{17}{9} - \frac{55}{27} \\
&= y^3 + (1-1)y^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{17}{3}\right)y + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{17}{9} - \frac{55}{27}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Yhdistellään vielä kertoimet, jolloin saadaan yhtälöä $y^3 + py + q = 0$ vastaava yhtälö

$$y^3 - 6y - 4 = 0,$$

missä kertoimina ovat $p = -6$ ja $q = -4$.

Tämä yhtälö voidaan nyt ratkaista lausetta 4.2 käyttäen. Sijoitetaan kertoimet p ja q juurten t_1 ja t_2 lausekkeisiin, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} \\
&= 2 - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}} \\
&= 2 - \sqrt{4-8} \\
&= 2 - \sqrt{-4} \\
&= 2 - \sqrt{4 \cdot (-1)} \\
&= 2 - 2i
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
t_2 &= -\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} \\
&= 2 + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}} \\
&= 2 + \sqrt{4-8} \\
&= 2 + \sqrt{-4} \\
&= 2 + \sqrt{4 \cdot (-1)} \\
&= 2 + 2i.
\end{aligned}$$

Jotta kuutiojuuret $\sqrt[3]{t_1}$ ja $\sqrt[3]{t_2}$ voidaan laskea, on juurrettavat t_1 ja t_2 esitettävä napakoordinaattimuodossa. Lasketaan ensin niiden modulit ja argumentit. Määritelmän 3.5 mukaan kompleksiluvun $z = a+bi$ moduli lasketaan kaavasta $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Näin ollen modulit $|t_1|$ ja $|t_2|$ ovat

$$|t_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = |t_2|,$$

jolloin juurrettavat t_1 ja t_2 tulevat muotoon

$$t_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \quad \text{ja} \quad t_2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

Selvitetään nyt niiden argumentit. Merkitään $\arg(t_1) = \theta_1$ ja $\arg(t_2) = \theta_2$. Koska kompleksilukujen t_1 ja t_2 napakoordinaattiesitykset ovat muotoa $t_1 = |t_1|(cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $t_2 = |t_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, argumenttien θ_1 ja θ_2 on toteutettava yhtälöt $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sekä $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Argumentin θ_1 osalta nämä yhtälöt toteutuvat kulman arvolla $\theta_1 = \frac{7\pi}{4}$, kun taas argumentin θ_2 osalta ne toteutuvat kulman arvolla $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Näin ollen kompleksilukujen t_1 ja t_2 napakoordinaattiesityksiksi saadaan

$$t_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

ja

$$t_2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Nyt voidaan hyödyntää lausetta 3.14 ja laskea juuret $\sqrt[3]{t_1}$ ja $\sqrt[3]{t_2}$. Sen avulla saadaan

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{t_1} &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3\cdot 4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3\cdot 4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

ja

$$\sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3\cdot 4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Muutetaan nämä juuret vielä takaisin muotoon $z = a + bi$. Koska $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ja $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, juureksi $\sqrt[3]{t_1}$ saadaan

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{t_1} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i\right)\\ &= -\frac{\sqrt{12}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{4} + \left(\frac{\sqrt{12}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{4}\right)i\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)i\\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i.\end{aligned}$$

Juureksi $\sqrt[3]{t_2}$ taas saadaan

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{t_2} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i\right) \\
&= \frac{\sqrt{12}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{4} + \left(\frac{\sqrt{12}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{4}\right)i \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i,
\end{aligned}$$

sillä $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ ja $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Lasketaan vielä loput lauseen 3.14 mukaiset juuret $\omega\sqrt[3]{t_1}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_1}$ sekä $\omega\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_2}$, missä $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ja $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Juurten $\omega\sqrt[3]{t_1}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_1}$ osalta näistä tuloista saadaan

$$\begin{aligned}
\omega\sqrt[3]{t_1} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) \\
&= -\frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i + \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4}i + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}i^2 \\
&= -\frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i + \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4}i - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}}{4} + \frac{-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-3}{4}i \\
&= -1-i
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
\omega^2\sqrt[3]{t_1} &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)\\
&=-\frac{1-\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}+1}{4}i-\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4}i-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}i^2\\
&=-\frac{1-\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}+1}{4}i-\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4}i+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}\\
&=\frac{-1+\sqrt{3}+3+\sqrt{3}}{4}+\frac{-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+3}{4}i\\
&=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}
$$

Juurten $\omega\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_2}$ osalta taas saadaan

$$
\begin{aligned}
\omega\sqrt[3]{t_2} &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)\\
&=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}i+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}i-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4}\\
&=\frac{-\sqrt{3}-1-3+\sqrt{3}}{4}+\frac{-\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3}}{4}i\\
&=-1+i
\end{aligned}
$$

sekä

$$
\begin{aligned}
\omega^2\sqrt[3]{t_2} &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)\\
&=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}i-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}i+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4}\\
&=\frac{-\sqrt{3}-1+3-\sqrt{3}}{4}+\frac{-\sqrt{3}+1-3-\sqrt{3}}{4}i\\
&=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i.
\end{aligned}
$$

Valitaan nyt $A=\omega\sqrt[3]{t_1}=-1-i$. Lauseen 4.2 mukaan B on jokin juurista $\sqrt[3]{t_2}$, $\omega\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2\sqrt[3]{t_2}$, jolla ehto $AB=-\frac{p}{3}$ toteutuu. Koska kerroin $p=-6$, ehdoksi saadaan

$$AB=-\frac{(-6)}{3}=2.$$

Kun valitaan $B = \omega\sqrt[3]{t_2} = -1 + i$, saadaan

$$AB = (-1 - i)(-1 + i) = (-1)^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2,$$

joten juurten A ja B voidaan nyt todeta toteuttavan vaaditun ehdon. Näillä valinnoilla saadaan myös $\omega A = \omega^2\sqrt[3]{t_1}$ ja $\omega^2 A = \sqrt[3]{t_1}$, sillä määritelmän 3.11 perusteella luvun 1 kuutiojuurilla on voimassa $\omega^3 = 1$ ja

$$\omega^2\sqrt[3]{t_1} = \omega \cdot \omega\sqrt{t_1} = \omega A \quad \text{sekä} \quad \sqrt[3]{t_1} = 1 \cdot \sqrt[3]{t_1} = \omega^3\sqrt[3]{t_1} = \omega^2 \cdot \omega\sqrt[3]{t_1} = \omega^2 A.$$

Samaan tapaan saadaan $\omega B = \omega^2\sqrt[3]{t_2}$ ja $\omega^2 B = \sqrt[3]{t_2}$.

Kun nämä juuret nyt tunnetaan voidaan laskea yhtälön $y^3 - 6y - 4 = 0$ ratkaisut

$$\begin{aligned} y_1 &= A + B, \\ y_2 &= \omega A + \omega^2 B \quad \text{ja} \\ y_3 &= \omega^2 A + \omega B, \end{aligned}$$

siis

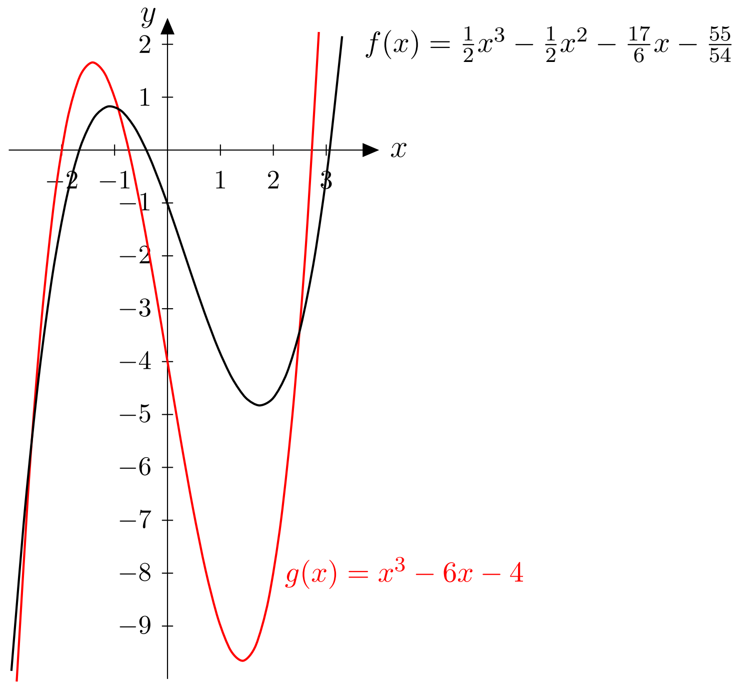
$$\begin{aligned} y_1 &= -1 - i - 1 + i = -2, \\ y_2 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2}i \\ &= 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i + \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \\ &= \frac{1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2}i \\ &= 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nyt on vielä laskettava alkuperäisen yhtälön $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{17}{6}x - \frac{55}{54} = 0$ ratkaisut. Koska tähän yhtälöön tehtiin sijoitus $x = y + \frac{1}{3}$, saadaan sen ratkaisuiksi

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}, \\ x_2 &= 1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \sqrt{3} \quad \text{ja} \\ x_3 &= 1 - \sqrt{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$



Kuva 4: Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{17}{6}x - \frac{55}{54}$ ja sitä vastaavan suppean funktion $g(x) = x^3 - 6x - 4$ kuvaajat.

5 Neljännen asteen polynomifunktio

Neljännen asteen polynomifunktiot ovat polynomifunktioita, jotka sisältävät ainakin yhden termin, jossa funktion muuttuja on korotettu neljänteen potenssiin. Samaan tapaan kuin toisen ja kolmannen asteen funktioiden tapauksessa, funktion korkeimman asteen termeissä on muuttuja korotettu neljänteen potenssiin.

Määritelmä 5.1. Funktio $f(x) = a''x^4 + b''x^3 + c''x^2 + d''x + e''$, missä $a'', b'', c'', d'', e'' \in \mathbb{R}$, on *neljännen asteen polynomifunktio*, kun $a'' \neq 0$.

Kun määritelmän 5.1 mukainen funktio asetetaan arvoltaan nollaksi, saadaan *neljännen asteen polynomiyhtälö*

$$a''x^4 + b''x^3 + c''x^2 + d''x + e'' = 0, \tag{17}$$

josta voidaan ratkaista sitä vastaavan funktion nollakohdat.

Samaan tapaan kuin kolmannen asteen yhtälöiden tapauksessa, voidaan määritelmän 5.1 perusteella tämä yhtälö jakaa kertoimella a'', jolloin saadaan

$$x^4 + a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0. \tag{18}$$

Tässä yhtälössä esiintyvät kertoimet a', b', c' ja d' voidaan lausua yhtälön (17) kertoimien avulla siten, että $a' = \frac{b''}{a''}$, $b' = \frac{c''}{a''}$, $c' = \frac{d''}{a''}$ ja $d' = \frac{e''}{a''}$. Samoin kuin kolmannen asteen yhtälöiden tapauksessa, jotta yhtälö voidaan ratkaista, on sitä yksinkertaistettava muuttujaa vaihtamalla. Sijoitetaan nyt yhtälöön (18) muuttujan x paikalle $x = y - \frac{a'}{4}$. Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$(y - \frac{a'}{4})^4 + a'(y - \frac{a'}{4})^3 + b'(y - \frac{a'}{4})^2 + c'(y - \frac{a'}{4}) + d' = 0,$$

josta saadaan

$$\begin{aligned}
&(y^4 - 4 \cdot y^3 \cdot \frac{a'}{4} + 6 \cdot y^2 \cdot \frac{a'^2}{4^2} - 4 \cdot y \cdot \frac{a'^3}{4^3} + \frac{a'^4}{4^4}) \\
&\quad + a'(y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot \frac{a'}{4} + 3 \cdot y \cdot \frac{a'^2}{4^2} - \frac{a'^3}{4^3}) + b'(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{a'}{4} + \frac{a'^2}{4^2}) \\
&\qquad + c'(y - \frac{a'}{4}) + d' = 0.
\end{aligned}$$

Kerrotaan sulut auki, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned}
&(y^4 - a'y^3 + \frac{3}{8}a'^2y^2 - \frac{1}{16}a'^3y + \frac{1}{256}a'^4) + (a'y^3 - \frac{3}{4}a'^2y^2 + \frac{3}{16}a'^3y - \frac{1}{64}a'^4) \\
&\quad +(b'y^2 - \frac{1}{2}a'b'y + \frac{1}{16}a'^2b') + (c'y - \frac{1}{4}a'c') + d' = 0.
\end{aligned}$$

Kun yhtälön vasemman puolen lauseke sievennetään ja ryhmitellään muuttujan potenssien mukaan, saadaan yhtälö muotoon

$$y^4 + (a' - a')y^3 + (-\frac{3}{8}a'^2 + b')y^2 + (\frac{1}{8}a'^3 - \frac{1}{2}a'b' + c')y$$
$$+ (-\frac{3}{256}a'^4 + \frac{1}{16}a'^2b' - \frac{1}{4}a'c' + d') = 0.$$

Koska tämän yhtälön kolmannen asteen tekijän kertoimeksi saadaan $(a' - a') = 0$, tarkasteltavaksi yhtälöksi jää

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0. \tag{19}$$

Tässä kertoimet b, c ja d ovat edellä esitetty toisen asteen termin kerroin $b = (-\frac{3}{8}a'^2 + b')$, ensimmäisen asteen termin kerroin $c = (\frac{1}{8}a'^3 - \frac{1}{2}a'b' + c')$ sekä vakiotermi $d = (-\frac{3}{256}a'^4 + \frac{1}{16}a'^2b' - \frac{1}{4}a'c' + d')$. Yhtälö on nyt saatettu sellaiseen muotoon, että se voidaan ratkaista.

Lause 5.2. *Neljännen asteen polynomiyhtälön $y^4 + by^2 + cy + d = 0$ ratkaisut ovat*

$$y_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 2z_0 + 4f}}{2} \quad \textit{ja} \quad y_{3,4} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 2z_0 - 4f}}{2},$$

missä z_0 on jokin yhtälön $z^3 - bz^2 - 4dz + (4bd - c^2) = 0$ ratkaisuista. Lisäksi $e = \pm\sqrt{z_0 - b}$ ja $f = \pm\sqrt{\frac{z_0^2}{4} - d}$ siten, että $ef = -\frac{c}{2}$.

Todistus. Tarkastellaan yhtälöä

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0.$$

Saatetaan se ensin muotoon

$$y^4 = -by^2 - cy - d$$

ja lisätään tämän yhtälön kummallekin puolelle lauseke $(zy^2 + \frac{z^2}{4})$, jolloin yhtälön vasemmalle puolelle muodostuu lauseke $y^4 + zy^2 + \frac{z^2}{4}$, johon voidaan käyttää kaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nyt yhtälö saadaan muotoon

$$\left(y^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = zy^2 - by^2 - cy + \frac{z^2}{4} - d.$$

Kun tämän yhtälön oikean puolen termien kertoimet yhdistellään muuttujan y potenssin mukaan, huomataan, että siitä muodostuu toisen asteen polynomi muuttujalle y ja saadaan yhtälö

$$\left(y^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = (z - b)y^2 - cy + \left(\frac{z^2}{4} - d\right). \tag{20}$$

Yhtälöstä (20) voidaan nyt ratkaista muuttuja y, jos apumuuttujan z arvo saadaan kiinnitettyä siten, että myös yhtälön (20) oikea puoli $(z-b)y^2 - cy + \left(\frac{z^2}{4} - d\right)$ voidaan jakaa tekijöihinsä käyttäen kaavaa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Edellä todettiin, että lauseke $(z-b)y^2 - cy + \left(\frac{z^2}{4} - d\right)$ on toisen asteen polynomi muuttujalle y, ja näin ollen se voidaan jakaa tekijöihinsä lausetta 2.4 käyttäen. Sivulla 10 johdettiin yhtälö (6), jossa kaavaa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vastaava polynomi $f(x)$ on jaettu tekijöihinsä, ja todettiin tällaisten polynomien olevan muotoa

$$f(x) = a(x - x_{1,2})(x - x_{1,2}) = ax^2 - 2ax_{1,2}x + ax_{1,2}^2 = (\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_{1,2})^2,$$

missä $x_{1,2}$ on yhtälön $ax^2 - 2ax_{1,2}x + ax_{1,2}^2 = 0$ ainoa ratkaisu. Näin ollen yhtälön (20) oikea puoli on saatava muotoon, jossa yhtälöllä $(z-b)y^2 - cy + \left(\frac{z^2}{4} - d\right) = 0$ on vain yksi ratkaisu. Kappaleessa 2.2 todettiin, että yleisellä toisen asteen yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on vain yksi ratkaisu, jos sen diskriminantti $D = 0$.

Muodotetaan nyt yhtälön $(z-b)y^2 - cy + \left(\frac{z^2}{4} - d\right) = 0$ diskriminantti, siis

$$D = (-c)^2 - 4(z-b)\left(\frac{z^2}{4} - d\right).$$

Tästä diskriminantin lausekkeesta voidaan edelleen muodostaa yhtälö

$$(-c)^2 - 4(z-b)\left(\frac{z^2}{4} - d\right) = 0,$$

josta saadaan edelleen

$$-z^3 + bz^2 + 4dz + (c^2 - 4bd) = 0.$$

Kertomalla tämä yhtälö luvulla -1 muuttujalle z saadaan kolmannen asteen yhtälö

$$z^3 - bz^2 - 4dz + (4bd - c^2) = 0. \tag{21}$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista muuttuja z Luvussa 4 ja lauseessa 4.2 esitetyllä tavalla. Lauseen 4.2 ratkaisukaava antaa yhtälölle (21) kolme ratkaisua, joita voidaan yleisesti merkitä vakiolla z_0, sillä ne kaikki toteuttavat yhtälön (21).

Sijoitetaan nyt edellä saatu ratkaisu z_0 yhtälöön (20), jolloin ratkaistavaksi yhtälöksi jää

$$\left(y^2 + \frac{z_0}{2}\right)^2 = (z_0 - b)y^2 - cy + \left(\frac{z_0^2}{4} - d\right).$$

Tämän yhtälön oikea puoli voidaan nyt jakaa tekijöihinsä kaavaa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ käyttäen, sillä arvolla $z = z_0$, yhtälön $(z_0-b)y^2-cy+\left(\frac{z_0^2}{4}-d\right)=0$ diskriminantti $D = 0$ ja tällöin polynomi $(z_0-b)y^2-cy+\left(\frac{z_0^2}{4}-d\right)$ mukailee yhtälöä (6). Olkoon nyt $e, f \in \mathbb{C}$ siten, että $(ey+f)^2 = e^2y^2+2efy+f^2$. Kun merkitään

$$e^2y^2+2efy+f^2 = (z_0-b)y^2-cy+\left(\frac{z_0^2}{4}-d\right),$$

voidaan kertoimille e ja f muodostaa yhtälöt

$$e^2 = z_0-b, \quad f^2 = \frac{z_0^2}{4}-d \quad \text{ja} \quad 2ef = -c,$$

joiden on kaikkien oltava voimassa. Kun näistä ratkaistaan vakiot e ja f, saadaan

$$e = \pm\sqrt{z_0-b}, \quad f = \pm\sqrt{\frac{z_0^2}{4}-d} \quad \text{ja} \quad ef = -\frac{c}{2}.$$

Näin ollen alkuperäinen neljännen asteen yhtälö voidaan ratkaista ratkaisemalla yhtälö

$$\left(y^2+\frac{z_0}{2}\right)^2 = (ey+f)^2,$$

josta ratkaistavaksi saadaan yhtälöt

$$\left(y^2+\frac{z_0}{2}\right) = (ey+f) \quad \text{ja} \quad \left(y^2+\frac{z_0}{2}\right) = -(ey+f).$$

Saattamalla nämä yhtälöt normaalimuotoon saadaan

$$y^2-ey+\frac{z_0-2f}{2} = 0 \quad \text{ja} \quad y^2+ey+\frac{z_0+2f}{2} = 0.$$

Ratkaistaan nämä yhtälöt lauseen 2.2 kaavalla, jolloin yhtälön $y^4+by^2+cy+d=0$ ratkaisuiksi saadaan

$$y_{1,2} = \frac{e\pm\sqrt{e^2-2z_0+4f}}{2} \quad \text{ja} \quad y_{3,4} = \frac{-e\pm\sqrt{e^2-2z_0-4f}}{2}.$$

□

Samaan tapaan kuin kolmannen asteen yhtälöitä käsiteltäessä, tehtiin yhtälöön $x^4+a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ sijoitus $x = y-\frac{a'}{4}$. Näin ollen alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$x_1 = y_1-\frac{a'}{4}, \quad x_2 = y_2-\frac{a'}{4}, \quad x_3 = y_3-\frac{a'}{4} \quad \text{ja} \quad x_4 = y_4-\frac{a'}{4}.$$

Tarkastellaan nyt neljännen asteen polynomiyhtälön ratkaisemista käytännössä.

Esimerkki 5.3. Ratkaistaan yhtälö $x^4 + 8x^3 + 18x^2 - x - \frac{61}{2} = 0$ lausetta 5.2 käyttäen.

Aloitetaan poistamalla yhtälöstä kolmannen asteen termi. Sijoitetaan siis yhtälöön uusi muuttuja y, jolle

$$x = y - \frac{8}{4} = y - 2.$$

Tällöin yhtälö tulee muotoon

$$(y-2)^4 + 8(y-2)^3 + 18(y-2)^2 - (y-2) - \frac{61}{2} = 0,$$

josta saadaan potenssienkorotusten jälkeen

$$\begin{aligned}(y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16) + 8(y^3 - 6y^2 + 12y - 8)&\\ +18(y^2 - 4y + 4) - (y-2) - \frac{61}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Kun tästä edelleen kerrotaan sulut auki ja järjestellään termit niiden asteen mukaan, tulee yhtälö muotoon

$$\begin{aligned}y^4 + (-8+8)y^3 + (24-48+18)y^2 &+ (-32+96-72-1)y\\ &+ \left(16 - 64 + 72 + 2 - \frac{61}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

josta sieventämällä saadaan ratkaistavaksi yhtälöksi

$$y^4 - 6y^2 - 9y - \frac{9}{2} = 0.$$

Tämä yhtälö voidaan nyt ratkaista käyttäen lausetta 5.2. Sijoitetaan ensin yhtälön kertoimet $b = -6$, $c = -9$ ja $d = -\frac{9}{2}$ lauseessa 5.2 esitettyyn kolmannen asteen yhtälöön $z^3 - bz^2 - 4dz + (4bd - c^2) = 0$. Tällöin saadaan yhtälö

$$z^3 - (-6)z^2 - 4\left(-\frac{9}{2}\right)z + \left(4(-6)\left(-\frac{9}{2}\right) - (-9)^2\right) = 0,$$

joka sievenee edelleen muotoon

$$z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0.$$

Lauseen 5.2 mukaan tälle yhtälölle on nyt löydettävä jokin ratkaisu z_0. Sen etsimisessä voidaan hyödyntää lausetta 4.2, mutta sitä ennen on yhtälöstä poistettava toisen asteen termi sijoituksella $z = w - \frac{6}{3} = w - 2$, jolloin ratkaistavaksi yhtälöksi tulee

$$(w-2)^3 + 6(w-2)^2 + 18(w-2) + 27 = 0,$$

josta saadaan edelleen

$$(w^3 - 6w^2 + 12w - 8) + 6(w^2 - 4w + 4) + 18(w-2) + 27 = 0.$$

Järjestelemellä termit niiden asteen mukaan ja sieventämällä yhtälö tulee muotoon

$$w^3 + (-6+6)w^2 + (12-24+18)w + (-8+24-36+27) = w^3 + 6w + 7 = 0,$$

jonka ratkaisemiseen voidaan nyt käyttää lauseen 4.2 ratkaisukaavaa. Sijoitetaan siis tämän yhtälön kertoimet $p = 6$ ja $q = 7$ juurrettavien t_1 ja t_2 lausekkeisiin, jolloin saadaan

$$t_1 = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{7^2}{4} + \frac{6^3}{27}} = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{216}{27}} = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -8$$

ja

$$t_2 = -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{7^2}{4} + \frac{6^3}{27}} = -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{216}{27}} = -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 1.$$

Tutkitaan seuraavaksi täyttävätkö juuret $\sqrt[3]{t_1}$ ja $\sqrt[3]{t_2}$ ehdon $AB = -\frac{p}{3}$. Koska $p = 6$, on siis oltava $AB = -\frac{6}{3} = -2$. Nyt

$$\sqrt[3]{t_1}\,\sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{1} = -2 \cdot 1 = -2,$$

joten voidaan valita $A = \sqrt[3]{t_1} = -2$ ja sille pariksi juuri $B = \sqrt[3]{t_2} = 1$. Näin ollen lauseen 4.2 perusteella erääksi yhtälön $w^3 + 6w + 7 = 0$ ratkaisuksi saadaan

$$w_0 = A + B = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = -2 + 1 = -1,$$

jonka avulla yhtälölle $z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0$ löydetään ratkaisu

$$z_0 = w_0 - 2 = -1 - 2 = -3.$$

Muita ratkaisuja ei yhtälölle $z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0$ tarvitse etsiä, sillä lauseen 5.2 kaavaan käy mikä tahansa saatavista ratkaisuista.

Lasketaan nyt kertoimet $e = \pm\sqrt{z_0 - b}$ ja $f = \pm\sqrt{\frac{z_0^2}{4} - d}$. Sijoittamalla yhtälön $y^4 - 6y^2 - 9y - \frac{9}{2} = 0$ kertoimet $b = -6$ ja $d = -\frac{9}{2}$ sekä ratkaisu $z_0 = -3$ näihin lausekkeisiin saadaan

$$e = \pm\sqrt{-3 - (-6)} = \pm\sqrt{3}$$

ja

$$f = \pm\sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - \left(-\frac{9}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{2}} = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Juurten e ja f on vielä täytettävä ehto $ef = -\frac{c}{2}$, eli on oltava

$$ef = -\frac{(-9)}{2} = \frac{9}{2}.$$

Nyt voidaan valita $e = \sqrt{3}$ ja $f = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, sillä tällöin

$$ef = \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Ratkaistaan nyt yhtälö $y^4 - 6y^2 - 9y - \frac{9}{2} = 0$ sijoittamalla $e = \sqrt{3}$ ja $f = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ sekä $z_0 = -3$ lauseessa 5.2 esitettyihin ratkaisujen $y_{1,2}$ ja $y_{3,4}$ kaavoihin. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} y_{1,2} =& \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 - 2(-3) + 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}}{2} \\ =& \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 6 + 6\sqrt{3}}}{2} \\ =& \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y_{3,4} =& \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 - 2(-3) - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}}{2} \\ =& \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 6 - 6\sqrt{3}}}{2} \\ =& -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{9 - 6\sqrt{3}}}{2} \\ =& -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} i, \end{aligned}$$

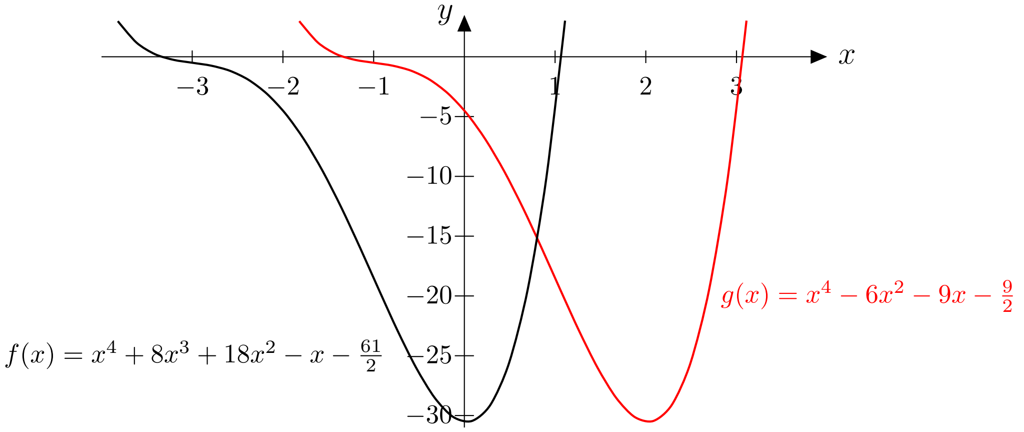
sillä $9 - 6\sqrt{3} \leq 0$ ja siten $\sqrt{9 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{-1 \cdot (6\sqrt{3} - 9)} = \sqrt{6\sqrt{3} - 9}\, i$.

Näin ollen yhtälön $y^4 - 6y^2 - 9y - \frac{9}{2} = 0$ ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{2} \approx -1{,}335\,809\,334, \\
y_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{2} \approx 3{,}067\,860\,141, \\
y_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}\,i \quad \text{ja} \\
y_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}\,i.
\end{aligned}$$

Alkuperäiseen yhtälöön $x^4 + 8x^3 + 18x^2 - x - \frac{61}{2} = 0$ tehtiin sijoitus $x = y - 2$, joten sen ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{2} \approx -3{,}335\,809\,334, \\
x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 + \frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{2} \approx 1{,}067\,860\,141, \\
x_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}\,i = -\frac{\sqrt{3}+4}{2} - \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}\,i \quad \text{ja} \\
x_4 &= -\frac{\sqrt{3}+4}{2} + \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}\,i.
\end{aligned}$$



Kuva 5: Funktioiden $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - x - \frac{61}{2}$ ja $g(x) = x^4 - 6x^2 - 9x - \frac{9}{2}$ kuvaajat ja nollakohdat.

6 Algebran peruslause

Edellisissä luvuissa on käsitelty toisen, kolmannen ja neljännen asteen polynomiyhtälöiden yleisiä ratkaisuja ja vastaavien polynomifunktioiden nollakohtien määrittämistä. Samalla huomattiin, ettei läheskään kaikilla polynomeilla ole reaalisia juuria. Esimerkiksi toisen asteen yhtälöillä todettiin kappaleessa 2.2 olevan kaksi, yksi tai ei yhtään reaalijuurta. Esimerkissä 3.3 taas tutkittiin toisen asteen yhtälöä, jonka juuret olivat kompleksisia. Yleisesti voidaankin todeta, että kaikille polynomeille voidaan löytää nollakohta kompleksilukujen joukosta. Tämän todistaminen vaatii kuitenkin ensin muutamien aputulosten tarkastelua.

Edellisissä luvuissa tarkastelu on rajattu reaalikertoimisiin toisen, kolmannen ja neljännen asteen polynomeihin. Tässä luvussa on kuitenkin tarkoitus laajentaa tarkastelu n. asteen polynomeihin, joiden kertoimet ovat kompleksisia.

Määritelmä 6.1. *Kompleksilukukertoimiset polynomit* $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, jotka ovat astetta $n \in \mathbb{N}$, ovat muotoa

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

missä $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ja $a_n \neq 0$.

Tällaiset polynomit voidaan kirjoittaa niiden kompleksiosan ja imaginaariosan summana, siis

$$p(z) = p(x + yi) = a(x, y) + i\, b(x, y).$$

Tässä sekä $a(x, y)$ että $b(x, y)$ ovat reaalikertoimisia polynomeja muuttujille x ja y. Samaan tapaan kuin yksittäisen kompleksiluvun tapauksessa, voidaan polynomille $p(z)$ laskea itseisarvo, eli moduli, $|p(z)|$ määritelmässä 3.5 esitetyllä tavalla, eli

$$|p(z)| = |a(x, y) + i\, b(x, y)| = \sqrt{a(x, y)^2 + b(x, y)^2}.$$

Kuten reaalikertoimiset polynomit yleensäkin, ovat polynomin $p(z)$ reaaliosa $a(x, y)$ ja imaginaariosa $b(x, y)$ jatkuvia. Näin ollen on myös polynomin $p(z) = p(x + yi) = a(x, y) + i\, b(x, y)$ oltava jatkuva kaikilla $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Tarkastellaan nyt lyhyesti polynomin $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ juurten olemassaolon riippuvuutta sen korkeimman asteen termin kertoimesta.

Lemma 6.2. *Polynomilla* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$*, missä* $p(z) \in \mathbb{C}[z]$*, on juuri jos ja vain jos polynomilla* $\frac{p(z)}{a_n}$ *on juuri.*

Todistus. Olkoon nyt $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, missä $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. Olkoon lisäksi z_0 polynomin $p(z)$ juuri. Tällöin

$$p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain korkeimman asteen termin kertoimella a_n saadaan

$$\frac{1}{a_n}p(z_0) = z_0^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}z_0^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

Näin ollen polynomilla $\frac{1}{a_n}p(z)$ on juuri z_0, jos polynomilla $p(z)$ on juuri z_0.

Olkoon z_0 nyt polynomin $\frac{p(z)}{a_n}$ juuri. Tällöin arvolla $z = z_0$ saadaan

$$\frac{p(z_0)}{a_n} = \frac{a_n}{a_n}z_0^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}z_0^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

Kun tämä yhtälö kerrotaan puolittain kertoimella a_n saadaan

$$a_n\frac{p(z_0)}{a_n} = a_n\frac{a_n}{a_n}z_0^n + a_n\frac{a_{n-1}}{a_n}z_0^{n-1} + \ldots + a_n\frac{a_0}{a_n} = a_n \cdot 0,$$

eli

$$p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Näin ollen voidaan todeta, että polynomin $\frac{p(z)}{a_n}$ juuri z_0 on myös polynomin $p(z)$ juuri, ja lause on siis tosi. □

Osoitetaan seuraavaksi raja-arvo funktion $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ itseisarvolle.

Lemma 6.3. *Polynomin $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ itseisarvon raja-arvo on*

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right| = \infty.$$

Todistus. Polynomi $p(z)$ on määritelmän 6.1 mukainen n. asteen polynomi, joten voidaan todeta eksponentin n saavan kokonaislukuarvot $n = 1, 2, \ldots$. Todistetaan näin ollen raja-arvon

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right| = \infty$$

paikkansapitävyys induktiolla eksponentin n suhteen.

Arvolla $n = 1$ polynomi $p(z)$ on ensimmäisen asteen polynomi

$$p(z) = z + a_0,$$

jonka itseisarvo on muotoa

$$|p(z)| = |z + a_0|.$$

Tätä itseisarvolauseketta voidaan muokata käyttäen lauseen 3.7 kolmioepäyhtälöä $|z + w| \geq |z| - |w|$, jolloin saadaan

$$|p(z)| = |z + a_0| \geq |z| - |a_0|.$$

Olkoon nyt $Q_1 > 0$ mielivaltainen ja $R_1 > 0$ siten, että $R_1 = Q_1 + |a_0|$. Olkoon $|z| > R_1$. Tällöin polynomin $p(z)$ itseisarvolle voidaan muodostaa epäyhtälö

$$|p(z)| = |z + a_0| \geq |z| - |a_0| > R_1 - |a_0| = (Q_1 + |a_0|) - |a_0| = Q_1.$$

Saatiin siis $|p(z)| > Q_1$, kun $|z| > R_1$, ja voidaan todeta, että eksponentin n saadessa arvon $n = 1$

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty.$$

Tehdään nyt induktio-oletus ja oletetaan, että eksponentin n arvolla $n = k$, polynomin $p(z)$ itseisarvon raja-arvo on

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left| z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0 \right| = \infty.$$

Toisin sanoen, kun $Q_k > 0$, löydetään sellainen $R_k > 0$, että kun $|z| > R_k$, niin

$$|p(z)| = \left| z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0 \right| > Q_k.$$

Olkoon nyt eksponentti $n = k+1$. Tällöin polynomi $p(z)$ ja sen itseisarvo tulevat muotoon

$$p(z) = z^{k+1} + a_k z^k + \cdots + a_0$$

ja

$$|p(z)| = |z^{k+1} + a_k z^k + \cdots + a_0| = \left| z \left(z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_2 z + a_1 + \frac{a_0}{z} \right) \right|.$$

Lauseen 3.6 ja lauseen 3.7 kolmioepäyhtälön $|z| - |w| \leq |z + w|$ perusteella tästä saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= \left| z \left(z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_2 z + a_1 + \frac{a_0}{z} \right) \right| \\
&= |z| \left| z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1 + \frac{a_0}{z} \right| \\
&\geq |z| \left(\left| z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1 \right| - \left| \frac{a_0}{z} \right| \right) \\
&= |z| \left| z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1 \right| - |z| \left| \frac{a_0}{z} \right| \\
&= |z| \left| z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1 \right| - \left| \frac{a_0 z}{z} \right| \\
&= |z| \left| z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1 \right| - |a_0|.
\end{aligned}$$

Nyt induktio-oletuksen perusteella voidaan todeta, että $\left|z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1\right| > Q_k$, kun $|z| > R_k$. Näin ollen

$$|p(z)| \geq |z| \left|z^k + a_k z^{k-1} + \cdots + a_1\right| - |a_0| > |z|Q_k - |a_0|.$$

Oletetaan nyt, että $|z| > R_1 = Q_1 + |a_0|$ ja $|z| > R_k$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} |p(z)| &> |z|Q_k - |a_0| \\ &> (Q_1 + |a_0|)\, Q_k - |a_0| \\ &= Q_1 Q_k + Q_k|a_0| - |a_0| \\ &= Q_1 Q_k + (Q_k - 1)|a_0|. \end{aligned}$$

Oletetaan vielä, että $Q_k > 1$, jolloin $Q_k - 1 > 1 - 1 = 0$. Näin ollen

$$|p(z)| > Q_1 Q_k + (Q_k - 1)|a_0| > Q_1 Q_k.$$

Olkoon nyt $Q_{k+1} > 0$ mielivaltainen. Valitaan lisäksi Q_1 ja Q_k siten, että $Q_{k+1} = Q_1 Q_k$. Tällöin saadaan

$$|p(z)| = |z^{k+1} + a_k z^k + \cdots + a_0| > Q_1 Q_k = Q_{k+1},$$

kun $|z| > \max\{R_1, R_k\}$, ja voidaan todeta, että arvolla $n = k + 1$ saadaan

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left|z^{k+1} + a_k z^k + \cdots + a_0\right| = \infty.$$

Näin ollen kaikilla arvoilla $n = 1, 2, \ldots$ itseisarvolausekkeelle $|p(z)| = |z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0|$ saadaan raja-arvo

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left|z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0\right| = \infty.$$

□

Esitetään vielä lyhyesti pari lausetta, joita tullaan myös hyödyntämään.

Lause 6.4. *Olkoon M kompakti metrinen avaruus. Jos $f : M \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, on $f(M)$ rajoitettu ja funktio f saavuttaa pienimmän ja suurimman arvonsa avaruudesssa M.*

Todistus. Tämän lauseen todistus löytyy lähteen [1], sivulta 111. □

Lauseessa 6.4 mainittu avaruuden M *kompaktisuus* tarkoittaa reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukkojen tapauksessa, että joukko M on suljettu ja rajoitettu. Algebran peruslauseen todistuksen kannalta on syytä mainita, että erityisesti suljettu pallo $B(x, r) \subset \mathbb{R}^2$ on metrinen ja kompakti avaruus. Tästä on mainittu niin ikään lähteen [1] sivulla 108.

Lause 6.5. *(Newtonin binomikaava) Binomin* $(a+b)$*, missä* $a, b \in \mathbb{C}$*, n. potenssi on muotoa*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ *ja*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Todistus. Tätä binomikaavaa ei todisteta tässä yhteydessä. Sen todistus on esitetty lähteen [4] sivulla 27. □

Nyt voidaan viimein siirtyä käsittelemään varsinaista *Algebran peruslausetta.*

Lause 6.6. *(Algebran peruslause)*
Jokaisella asteen $n \geq 1$ *polynomilla* $p(z) \in \mathbb{C}[z]$*, on ainakin yksi nollakohta, eli juuri,* $z_0 \in \mathbb{C}$*.*

Todistus. Olkoon $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polynomifunktio siten, että

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Jos vakiotermi $a_0 = 0$, on tällä polynomilla varmasti nollakohta $z = 0$, sillä tällöin

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z \\ &= z(a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1), \end{aligned}$$

mistä voidaan muodostaa tulon nollasäännöllä ratkeava yhtälö

$$z(a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1) = 0.$$

Valitaan siis $a_0 \neq 0$. Lisäksi lemman 6.2 perusteella polynomilla $p(z)$ on juuri vain, jos myös polynomilla $\frac{p(z)}{a_n}$ on juuri. Valitaan näin ollen $a_n = 1$, jolloin polynomi $p(z)$ tulee muotoon

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Osoitetaan nyt, että polynomifunktion $p(z)$ modulilla $|p(z)|$ on globaali minimi jossakin pisteessa $z_0 \in \mathbb{C}$. lemmassa 6.3 todettiin itseisarvofunktion $|p(z)| = |z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0|$ raja-arvon olevan

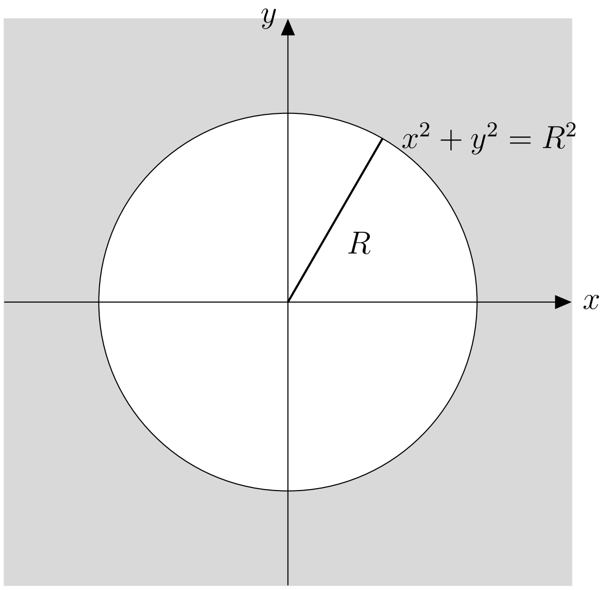
$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left| z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \right| = \infty,$$

eli

$$|p(z)| = \left|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right| > Q$$

mielivaltaisella $Q > 0$, kun $|z| > R$, missä R on tietty positiivinen luku. Näin ollen mille tahansa reaaliluvulle $Q > 0$ voidaan löytää reaaliluku $R > 0$ siten, että kun $|z| > R$, niin $|p(z)| > Q$. Määritelmässä 3.5 todettiin kompleksiluvun $z = x + yi$ modulin olevan muotoa $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} \in \mathbb{R}$. Näin ollen valinta $|z| > R$ vastaa R-säteisen origokeskeisen ympyrän ulkopuolista aluetta, sillä määritelmän 3.5 perusteella

$$|z|^2 = |x + yi|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 > R^2.$$



Kuva 6: R-säteinen, origokeskeinen ympyrä $x^2 + y^2 = R^2$ ja sen ulkopuoliset pisteet $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > R^2\}$.

Valitaan nyt $Q = 1 + |a_0|$. Tällöin lemman 6.3 perusteella voidaan todeta, että $|p(z)| > 1 + |a_0|$ aina, kun $|z| > R$, missä $|z| > R$ vastaa kuvan 6 mukaista aluetta. Lisäksi voidaan päätellä, että valinta $|z| \leq R$ vastaa kuvassa 6 esitetyn ympyrän sisäistä aluetta, eli pisteitä $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$.Näiden kompleksitason pisteiden $z = x + yi$ muodostama joukko on suljettu ja rajoitettu, sillä kuvan 6 joukko $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ vastaa suljettua palloa $B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. Lisäksi määritelmän 3.5 perusteella polynomifunktion $p(z)$

moduli $|p(z)| \in \mathbb{R}$. Näin ollen voidaan hyödyntää lausetta 6.4 ja todeta, että jatkuvalle funktiolle $|p(z)|$ voidaan löytää minimi M_p suljetussa kiekossa

$$D_R = \{z = x + yi : |z| = |x + yi| \leq R\}.$$

Nyt kompleksitason piste $(0, 0)$ sisältyy varmasti kiekkoon D_R, sillä sitä vastaavan kompleksiluvun

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0,$$

moduliksi saadaan

$$|z| = |0| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0 \in [0, R].$$

Olkoon M_p nyt funktion $|p(z)|$ minimi kiekossa D_R. Sille on varmasti voimassa $M_p \leq |a_0|$, sillä arvolla $z = 0 + 0 \cdot i = 0$ funktio $|p(z)|$ saa arvon

$$|p(0)| = \left|0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_0\right| = |a_0|.$$

Minimi M_p on myös funktion $|p(z)|$ globaali minimi, sillä R valittiin siten, että

$$|p(z)| > Q = 1 + |a_0| \text{ kaikilla } |z| > R, \text{ eli } z \notin D_R.$$

Näin ollen muuttujalle z voidaan löytää arvo $z = z_0$, jolla $M_p = |p(z_0)| \leq |p(z)|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Muodostetaan nyt polynomifunktiosta $p(z)$ uusi polynomifunktio $f(z)$, jonka moduli $|f(z)|$ saa miniminsä M_f muuttujan arvolla $z = 0$ ja $M_f = M_p = |p(z_0)|$. Tehdään se sijoittamalla polynomiin $p(z)$ binomi $(z + z_0)$, missä z_0 on edellä löydetty muuttujan z arvo, jolla $|p(z_0)| = M_p$. Tällöin saadaan

$$f(z) = p(z + z_0) = (z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + \ldots + a_0.$$

lauseen 6.6 kaavalla voidaan nämä potenssit kirjoittaa summana

$$(z + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k,$$

josta muodostuu uusi polynomi. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + z_0)^n + a_{n-1} (z + z_0)^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} z^{(n-1)-k} z_0^k + \ldots + a_1(z + z_0) + a_0, \end{aligned}$$

missä

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Järjestellään nyt näistä summista saatavat termit asteidensa mukaan. Koska kertoimet a_i, missä $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, ja edellä johdettu z_0 ovat vakioita, voidaan ne yhdistellä kertoimiksi b_i, missä $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, muuttujalle z. Näin ollen tämä uusi polynomifunktio $f(z)$ tulee muotoon

$$f(z) = p(z + z_0) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Muodostetaan nyt polynomin $f(z)$ moduli, siis

$$|f(z)| = |p(z + z_0)| = \left|z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0\right|.$$

Koska $|f(z)| = |p(z + z_0)|$ on polynomien f ja p moduleilla varmasti sama minimi, eli $M_f = M_p = |p(z_0)|$. Lisäksi polynomi $f(z)$ muodostettiin siten, että arvolla $z = 0$,

$$|f(0)| = |p(0 + z_0)| = |p(z_0)| = M_p = M_f, \tag{22}$$

joten funktio $|f(z)|$ saa miniminsä arvolla $z = 0$.

Todistetaan seuraavaksi, että $|f(0)| = |p(z_0)| = 0$, jolloin $f(0) = p(z_0) = 0$ ja voidaan todeta, että polynomilla $p(z)$ on nollakohta. Tehdään tätä varten vastaoletus, eli oletetaan, että $f(0) \neq 0$, jolloin

$$f(0) = 0^n + b_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + b_0 = b_0 \neq 0.$$

Mikäli siis voidaan osoittaa, että tämä oletus $f(0) \neq 0$ johtaa ristiriitaan, on päästy haluttuun lopputulokseen ja voidaan todeta, että kaikilla polynomeilla on nollakohta kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$.

Muodostetaan nyt polynomista $f(z)$ sellainen polynomi $g(z)$, jonka moduli $|g(z)|$ saa miniminsä M_g arvolla $z = 0$ ja $|g(0)| = M_g = 1$. Olkoon siis

$$g(z) = \frac{1}{b_0} f(z) = \frac{1}{b_0} z^n + \frac{b_{n-1}}{b_0} z^{n-1} + \cdots + \frac{b_0}{b_0} = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + 1,$$

missä $c_i = \frac{b_i}{b_0}$, kun $i = 0, 1, 2 \ldots n$. Tämän polynomin modulilla

$$|g(z)| = \left|c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + 1\right| = \left|\frac{1}{b_0} f(z)\right| = \left|\frac{1}{b_0}\right| \cdot |f(z)|$$

on minimi M_g arvolla $z = 0$, sillä funktio $|f(z)|$ sai myös miniminsä arvolla $z = 0$, ja toisaalta lauseen 3.6 avulla saadaan

$$\begin{aligned} |g(0)| &= \left|\frac{1}{b_0} f(0)\right| = \left|\frac{1}{b_0}\right| |f(0)| = \left|\frac{1}{b_0}\right| M_f \\ &\leq \left|\frac{1}{b_0}\right| |f(z)| = \left|\frac{1}{b_0} f(z)\right| = |g(z)|, \end{aligned} \tag{23}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Sijoittamalla $z = 0$ saadaan minimin M_g arvoksi

$$M_g = |g(0)| = |c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot 0 + 1| = 1.$$

Oletetaan nyt, että kerroin c_k on matalimman asteen termin kerroin, jolle $c_k \neq 0$. Tällöin kaikilla kertoimilla c_i, missä $1 \leq i < k$, saadaan $c_i = 0$ ja polynomi $g(z)$ tulee muotoon

$$\begin{aligned} g(z) &= c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_k z^k + 0 \cdot z^{k-1} + \ldots + 0 \cdot z + 1 \\ &= c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_k z^k + 1. \end{aligned}$$

Luodaan nyt tästä polynomista $g(z)$ muuttujanvaihtoa käyttäen uusi polynomi $h(w)$ sijoittamalla muuttujan z paikalle tulo $z = rw$, missä $w \in \mathbb{C}$ ja

$$r = \sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}.$$

Koska $c_k \neq 0$, kerroin r on hyvin määritelty ja

$$\begin{aligned} h(w) &= g(rw) \\ &=1 + c_k \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\, w\right)^k + c_{k+1} \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\, w\right)^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\, w\right)^n \\ &=1 + c_k \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^k w^k + c_{k+1} \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^n w^n \\ &=1 + c_k \left(-\frac{1}{c_k}\right) w^k + c_{k+1} \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^n w^n \\ &=1 - \frac{c_k}{c_k} w^k + c_{k+1} \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^n w^n \\ &=1 - w^k + c_{k+1} \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^n w^n. \end{aligned}$$

Kun polynomin $h(w)$ lauseke ilmoitetaan kertoimen $r = \sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}$ avulla, tulee se muotoon

$$\begin{aligned}
h(w) &= 1 - w^k + c_{k+1}\left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n \left(\sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}\right)^{n} w^n \\
&= 1 - w^k + c_{k+1} r^{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n r^n w^n \\
&= 1 - w^k + w^{k+1}\left(c_{k+1} r^{k+1} + c_{k+2} r^{k+2} w + \cdots + c_n r^n w^{n-k-1}\right).
\end{aligned}$$

Merkitään nyt suluissa olevaa lauseketta polynomilla

$$m(w) = c_{k+1} r^{k+1} + c_{k+2} r^{k+2} w + \cdots + c_n r^n w^{n-k-1},$$

jolloin polynomiksi $h(w)$ saadaan

$$h(w) = 1 - w^k + w^{k+1} m(w).$$

Muodostetaan vielä polynomin $h(w)$ moduli, eli

$$|h(w)| = \left|1 - w^k + w^{k+1} m(w)\right|.$$

Olkoon M_h nyt funktion $|h(w)|$ minimi. Koska polynomi $h(w)$ määriteltiin siten, että $h(w) = g(rw) = g(z)$, voidaan todeta, että

$$M_g = |g(0)| \leq |g(z)| = |g(rw)| = |h(w)|.$$

Lisäksi muuttuja w määriteltiin siten, että $z = rw$, missä $r \neq 0$. Näin ollen tulon nollasäännön perusteella saadaan $w = 0$, kun $z = 0$. Funktion $|h(w)|$ minimiksi saadaan siis

$$M_h = |h(0)| = 1 = |g(0)| = M_g. \tag{24}$$

Tutkitaan nyt, mitä yhtälöstä (24) seuraa tarkastelemalla funktion $|h(w)|$ arvoja kompleksitason pisteen $(0,0)$ läheisyydessä lähestymällä tätä pistettä positiivista x-akselia pitkin.

Tutkitaan ensin, miten tulo $w|m(w)|$ käyttäytyy pisteen $(0,0)$ läheisyydessä tarkastelemalla raja-arvoa $\lim_{w\to 0} w|m(w)|$ lähestyttäessä pistettä $(0,0)$ positiivista reaaliakselia pitkin. Olkoon siis $\epsilon > 0$ ja olkoon $0 < |w - 0| = |w| < \delta$. Lauseen 3.6 ja seurauksen 3.8 avulla saadaan

$$\begin{aligned}
|w|m(w)| - 0| &= |w|m(w)|| \\
&= |w|\,|m(w)| \\
&= |w|\left|c_{k+1} r^{k+1} + c_{k+2} r^{k+2} w + \cdots + c_n r^n w^{n-k-1}\right| \\
&\leq |w|\left(\left|c_{k+1} r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2} r^{k+2} w\right| + \cdots + \left|c_n r^n w^{n-k-1}\right|\right).
\end{aligned}$$

Rajataan nyt tarkasteltavat muuttujan $w = x + yi$ arvot sellaisiin positiivisella x-akselilla oleviin kompleksitason pisteisiin, jotka ovat hyvin lähellä pistettä $(0,0)$. Asetetaan tätä varten muuttujan w imaginaariosan y arvoksi $y = 0$ ja reaaliosan x arvot välille $0 < x < 1$. Tällöin saadaan $0 < w < 1$ ja itseisarvojen sisällä esiintyville muuttujan w potensseille on voimassa $w, w^2, \ldots, w^{n-k-1} < 1$. Näin ollen voidaan todeta, että

$$\begin{aligned}||w|m(w)| - 0| &\leq |w| \left(\left|c_{k+1}r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2}r^{k+2}w\right| + \cdots + \left|c_n r^n w^{n-k-1}\right|\right) \\ &< |w| \left(\left|c_{k+1}r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2}r^{k+2}\right| + \cdots + \left|c_n r^n\right|\right).\end{aligned}$$

Valitaan nyt $\delta = \frac{\epsilon}{|c_{k+1}r^{k+1}|+|c_{k+2}r^{k+2}|+\cdots+|c_n r^n|}$ ja oletetaan, että $0 < |w - 0| = |w| < \delta$. Määritelmän 6.1 perusteella on oltava $c_n \neq 0$. Lisäksi kerroin c_k ja näin ollen myös kerroin r määriteltiin siten, että $c_k \neq 0$ ja $r = \sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}} \neq 0$. Näin ollen δ on hyvin määritelty ja saadaan

$$\begin{aligned}||w|m(w)| - 0| &< |w| \left(\left|c_{k+1}r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2}r^{k+2}\right| + \cdots + \left|c_n r^n\right|\right) \\ &< \delta \left(\left|c_{k+1}r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2}r^{k+2}\right| + \cdots + \left|c_n r^n\right|\right) \\ &= \frac{\epsilon \left(\left|c_{k+1}r^{k+1}\right| + \left|c_{k+2}r^{k+2}\right| + \cdots + \left|c_n r^n\right|\right)}{|c_{k+1}r^{k+1}| + |c_{k+2}r^{k+2}| + \cdots + |c_n r^n|} \\ &= \epsilon,\end{aligned}$$

eli voidaan todeta, että positiivista x-akselia pitkin lähestyttäessä

$$\lim_{w \to 0} w|m(w)| = 0.$$

Kun nyt on todettu, miten tulo $w|m(w)|$ käyttäytyy lähestyttäessä muuttujan w arvoa $w = 0$ positiivista x-akselia pitkin, voidaan siirtyä tarkastelemaan funktion $|h(w)|$ käyttäytymistä lähestyttäessä sen oletettua minimiä $M_h = |h(0)| = 1$ samaan tapaan positiivista x-akselia pitkin. Valitaan siis kompleksimuuttujan $w = x + yi$ imaginaariosan y arvoksi $y = 0$ ja rajataan reaaliosan x arvot välille $0 < x < 1$, jolloin myös $0 < w < 1$. Lauseen 3.7 kolmioepäyhtälön $|z + w| \leq |z| + |w|$ ja lauseen 3.6 perusteella voidaan nyt todeta, että

$$\begin{aligned}|h(w)| &= \left|1 - w^k + w^{k+1}m(w)\right| \\ &\leq \left|1 - w^k\right| + \left|w^{k+1}m(w)\right| \\ &= \left|1 - w^k\right| + \left|w^{k+1}\right| |m(w)|.\end{aligned}$$

Lisäksi $0 < w < 1$, joten on oltava $0 < w^k < 1$ ja $0 < w^{k+1} < 1$. Näin ollen

$$\begin{aligned}|h(w)| &\leq \left|1 - w^k\right| + \left|w^{k+1}\right| |m(w)| \\ &= 1 - w^k + w^{k+1} |m(w)| \\ &= 1 - w^k(1 - w|m(w)|).\end{aligned}$$

Koska lähestyttäessä kompleksitason pistettä $(0,0)$ positiivista x-akselia pitkin $\lim_{w\to 0} w|m(w)| = 0$, on mahdollista löytää sellainen $\delta > 0$, jolla $w|m(w)| < \frac{1}{2}$, kun $|w| < \delta$. Tämä δ on raja-arvon $\lim_{w\to 0} w|m(w)| = 0$ osoituksen perusteella muotoa

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\frac{1}{2}}{|c_{k+1}r^{k+1}| + |c_{k+2}r^{k+2}| + \cdots + |c_n r^n|} \\ &= \frac{1}{2\left(|c_{k+1}r^{k+1}| + |c_{k+2}r^{k+2}| + \cdots + |c_n r^n|\right)}.\end{aligned}$$

Kun valitaan muuttujalle w reaaliakselilta sellainen arvo $w = w_0 > 0$, jolla $|w_0| = w_0 < \delta$, saadaan siis

$$\begin{aligned}|h(w_0)| &\leq 1 - w_0^k(1 - w_0|m(w_0)|) \\ &< 1 - w_0^k(1 - \frac{1}{2}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}w_0^k.\end{aligned}$$

Koska $0 < w_0 < \delta$, on oltava

$$|h(w_0)| < 1 - \frac{1}{2}w_0^k < 1,$$

mikä on ristiriita, sillä yhtälön (24) perusteella piti funktion $|h(w)|$ minimin olla $M_h = |h(0)| = 1 = |g(0)| = M_g$, eli sama kuin funktion $|g(z)|$. Näin ollen ei funktion $|g(z)|$ minimi voi olla $M_g = 1$. Polynomi $g(z)$ taas muodostettiin polynomista $f(z)$ siten, että sen itseisarvo $|g(z)|$ saa miniminsä varmasti samalla arvolla kuin funktio $|f(z)|$, ja sen itseisarvon minimi on varmasti $M_g = |g(0)| = 1$, jos funktion $|f(z)|$ minimi M_f on $M_f \neq 0$. Funktion $|f(z)| = |z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0|$ minimin arvolle oli kaksi vaihtoehtoa, joko $M_f = |f(0)| = b_0 = 0$ tai $M_f = |f(0)| = b_0 \neq 0$. Koska polynomin $g(z)$ muodostamisessa tehty oletus $M_f \neq 0$ johti ristiriitaan, on oltava $M_f = |f(0)| = 0$. Yhtälön (22) perusteella on tällöin oltava $M_p = |p(z_0)| = |f(0)| = M_f = 0$, jolloin on oltava $p(z_0) = 0$. Näin ollen alkuperäisellä polynomilla $p(z)$ on varmasti nollakohta. □

Algebran peruslause takaa sen, että mille tahansa polynomifunktiolle, joka ei ole vakiofunktio, voidaan löytää nollakohta kompleksitasossa. Se ei kuitenkaan sano mitään juurien todellisesta lukumäärästä tai siitä miten ne löydetään. Korkean asteen polynomifunktion juurten löytäminen voikin olla hankalaa, minkä voi jo arvata lauseessa 5.2 esitetyn neljännen asteen polynomiyhtälön ratkaisukaavan ja siihen liittyneen esimerkin 5.3 perusteella.

Lähdeluettelo

[1] Carothers, N. L. : **Real Analysis**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] Churchill, Ruel V. ; Brown, James W. ; Verhey, Roger F: **Complex Variables and Applications**, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1974.

[3] Hahn, Liang-shin: **Complex Numbers and Geometry**, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1994.

[4] Harjulehto, Petteri; Klén, Riku; Koskenoja, Mika: **Analyysia reaaliluvuilla**, Petteri Harjulehto, Turku, 2014.

[5] Jäppinen, Paavo; Kupiainen, Alpo; Räsänen, Matti: **Lukion Calculus 1: MAA1 Funktiot ja yhtälöt & MAA2 Polynomifunktiot**, Otava, Keuruu, 2008.

[6] Nicodemi, Olympia E. ; Sutherland, Melissa A. ; Towsley, Gary W. : **An Introduction to Abstract Algebra with Notes to the Future Teacher**, Pearson Education, Inc. , Upper Saddle River, New Jersey, 2007.

[7] Stahl, Saul: **Introductory Modern Algebra: A Historical Approach**, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 1997.